

Calculul plăcilor groase.

(Prof.dr.ing.G. Kümbetlian)



Academia de Științe Tehnice din România
Secția “Mecanică Tehnică”

Către membrii Secției
D-lui Catalin Turcoiu

Vă rugăm să participați la ședința de secție din data de 8 Septembrie 2015 la ora 12⁰⁰ în sala din B-dul Dacia, cu următoarea ordine de zi:

1. Prezentarea lucrării “Calculul placilor groase” Prof. Univ. Dr. Ing. Garabet Kumbetlian’;
2. Dezbateri științifice și tehnice ca urmare a prezentării;
3. Componenta actuală cu membri titulari, corespondenți și de onoare. Portofoliul de noi membri pentru perioada 2015-2016;
4. Diverse.

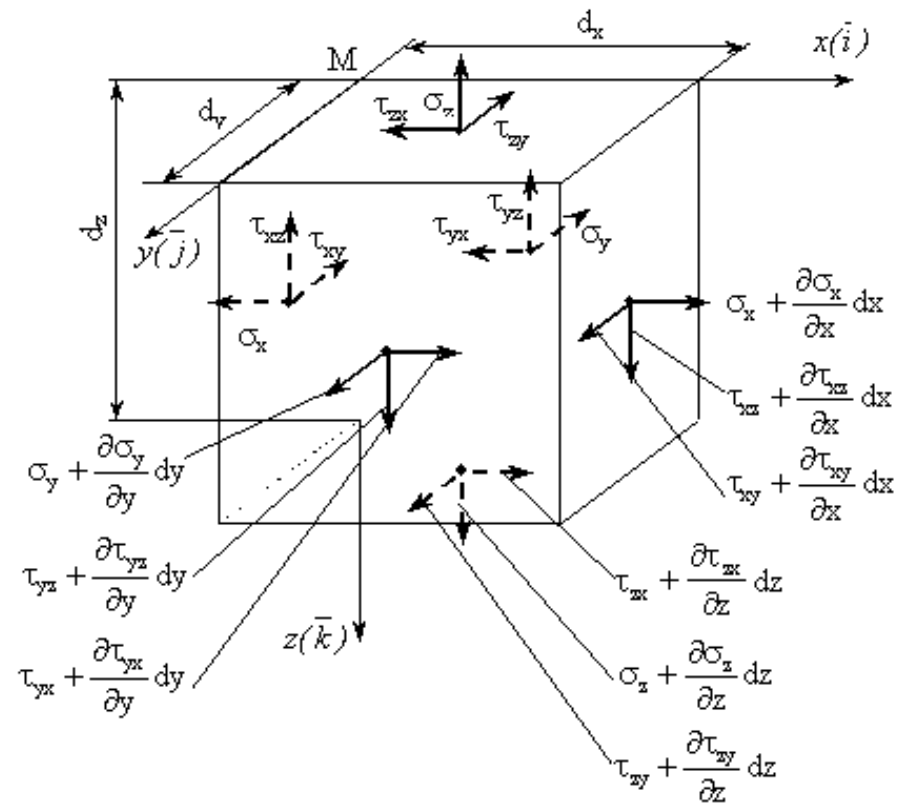
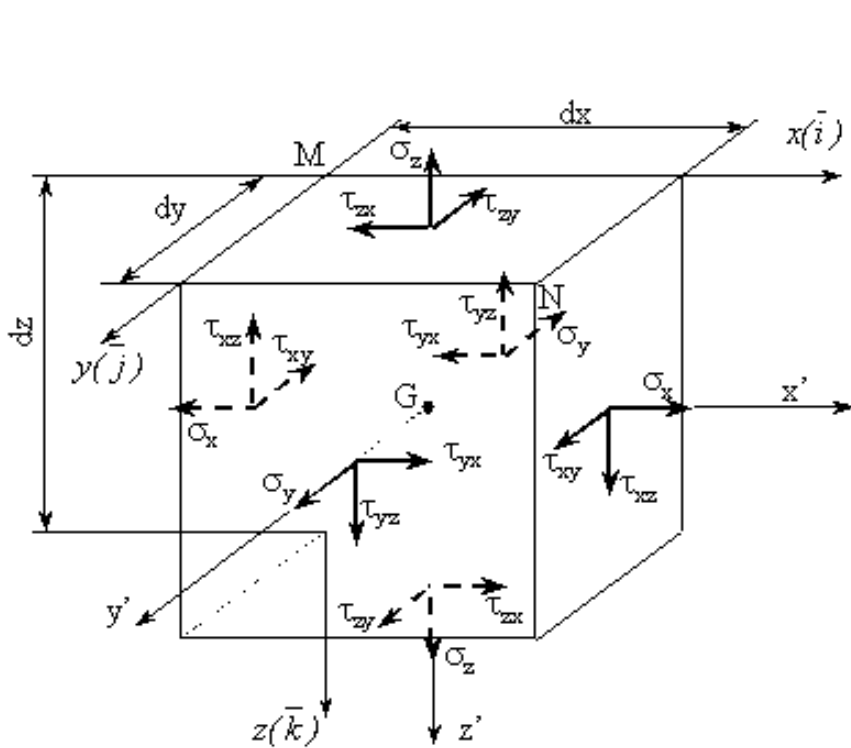
Președinte Secție
Prof. Univ. Dr.Ing. Polidor BRATU

Motto

“Când te specializezi într-o anumită știință, învață neapărat și istoria ei. Aceasta te lecuiește de orice dogmatism”

Lucian Blaga

Prin definiție **“plăcile groase”** sunt **structuri spațiale**, în punctele cărora toate cele 6 componente ale tensiunilor pot fi diferite de zero. În consecință, problema plăcilor groase este o **problemă spațială de teoria elasticității**.



O primă soluție pentru plăcile groase a fost dată chiar de către Saint-Venant, în traducerea cărții lui Clebsch *“Elastizität der festen Körper”* (1862) și respectiv *“La théorie de l'élasticité des corps solides”* (1883, după 21 ani).

**Adhémar Jean Claude Barré
de Saint-Venant (1797-1886)**



**Rudolf Friedrich Alfred
Clebsch (1833-1872)**



Soluția lui S.Venant a fost “amendată” (la rândul ei) de Isaac Todhunter și Karl Pearson în cartea lor *“The History of the Theory of Elasticity”* (vol. II/1 p.217, 1893), la 7 ani după moartea lui.

Isaac Todhunter (1820-1884)



Karl Pearson (1857-1936)



A.E.H. LOVE

**O altă soluție și o discuție
asupra teoriei exacte a
plăcilor a mai prezentat și**

John Henry Michell

(26.10.1863-03.02.1940),

teorie dezvoltată ulterior de

Augustus Edward Hough

Love

(17.04.1863-05.06.1940)

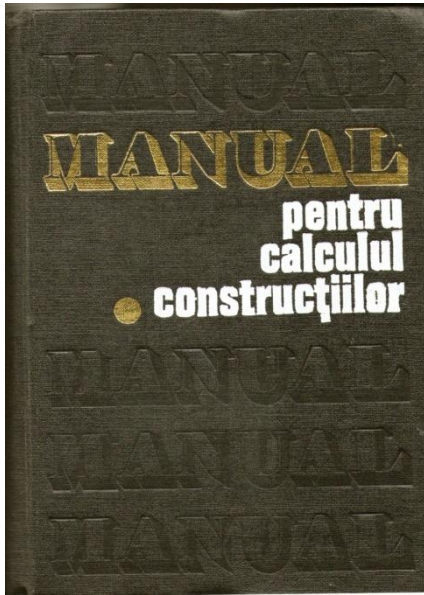
în cartea sa de elasticitate.



St.P. Timoshenko

În *“History of Strength of Materials”* a lui St.P. Timoshenko (1953 și 1983) și mai ales în *“Theory of Plates and Shells”* a lui Timoshenko și S.Woinowsky-Krieger (1959) sunt amintite și contribuțiile în acest domeniu ale lui B. Galerkin, G.P. Birkhoff, C.A. Garabedian, A.C. Stevenson, L. Leibenson, Lurie ș.a.)





La noi, în „Manualul pentru calculul construcțiilor” apărut în anul 1977 în Editura Tehnică, din cele **1392 de pagini** ale sale, **problema plăcilor** era prezentată în secțiunea a VI-a, în cuprinsul a **213 pagini**. **Problemele speciale de plăci** erau prezentate în capitolul 11, pe întinderea a **3 pagini**, iar **problematica plăcilor groase** era tratată (în cadrul acestui capitol) în paragraful 11.3 în **13 rânduri**. În cadrul acestui paragraf se admitea, că “plăcile groase pot fi studiate doar prin metodele teoriei elasticității spațiale”. Erau **citate doar trei lucrări** ale unor autori care dăduseră soluții, dar numai pentru plăci circulare încărcate axial-simetric.

Și aceasta în ciuda faptului că încă din anul 1973 **MIRCEA MIȘICU** elaborase: *„Exact theories of thick shells, derived by means of the method of transversal mobility of physical fields, and correlations with other theories”* [1].



Mircea Mișicu trata problema plăcilor groase ca o problemă inversă de teoria elasticității spațiale, precizând că: “soluțiile stabilite corespund unor încărcări descrise cu ajutorul unor funcții armonice”. În anii următori am abordat și eu problema plăcilor groase, numind soluția problemei:

***“A general model for the calculation of thick plates and rods”*. Iată în ce consta:**

A GENERAL MODEL FOR THE CALCULATION OF THICK PLATES (AND RODS)

by G. KÜMBETLIAN *

This paper presents a general theoretical model for the calculation of thick plates (and rods) under biharmonic loads, which satisfies the large majority of loads met with in practice.

1. GENERAL CONSIDERATION

The problem of the correct calculation of thick plates has concerned many authors lately. But the solutions already suggested are either inapplicable due to the complexity or to the lack of correlation of the elastic constants with the real physical ones of the plate, or the above solutions are erroneous due to the neglecting of some terms of the same order with other terms included in the solutions.

In [1] and [2] the displacement field of the elastic body without mass forces (subjected to some static loading) has been defined by the functions

$$\begin{aligned}u &= \sum_0^N \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!} (-1)^i [\Delta^i (W_{,x} + \Phi) + i \Delta^{i-1} \Omega_{,x}], \\v &= \sum_0^N \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!} (-1)^i [\Delta^i (W_{,y} + \Psi) + i \Delta^{i-1} \Omega_{,y}], \\w &= \sum_0^N \frac{z^{2i}}{(2i)!} (-1)^i [\Delta^i W + i \Delta^{i-1} \Omega],\end{aligned}\quad (1)$$

by means of the $(N+1)$ -harmonic representati n functions Φ , Ψ and Ω

$$\Delta^{N+1} \Phi = \Delta^{N+1} \Psi = \Delta^{N+1} \Omega = 0, \quad (2)$$

and of the $(N+2)$ -harmonic displacement W

$$\Delta^{N+2} W = 0, \quad (3)$$

given by the relations

$$\Delta^{N+1} W + (N+1) \Delta^N \Omega = 0 \quad (4)$$

* Marine Institute, Constanța

Am luat în considerare (ca “punct de plecare”) funcțiile deplasărilor (**u, v și w**) (1) unui punct oarecare al plăcii, funcții definite de Mișicu [1] sub forma unor sume convergente pentru $i=0,1,\dots,N$, în care **z** este cota punctului plăcii în raport cu planul median, **Φ, Ψ și Ω** [din(1) și (2)] sunt “funcții de reprezentare $(N+1)$ armonice”, iar “**W** [din (1) și (3)], este funcția $(N+2)$ armonică a deplasărilor punctelor din planul median al plăcii”.

and

$$\Omega = \frac{\Phi_{,x} + \psi_{,y}}{2(1-\nu)}, \quad (5)$$

in which $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, and ν is the coefficient of transversal contraction of the material.

In order to reflect in adequate terms all the influences which complex loads (such as biharmonic ones) could exert on the physical sizes of a thick plate (or rod) and starting from a finite displacement field as shown in (1), a general model has been established with solutions in displacements, stresses, couples and forces for thick plates (or parallelepipedic rods) with loads as those mentioned above.

The model can be also applied to the calculation of plates under simpler lateral loads, as well as to the calculation of thin plates, as it intrinsically includes the corresponding solutions to such particular cases.

2. THE GENERAL MODEL FOR THICK PLATES (AND RODS), UNDER LATERAL BIHARMONIC LOADS

2.1. SOLUTIONS IN DISPLACEMENTS

Below, we shall consider that on one of the lateral surfaces of the plate on which the load $p=p(x, y)$ acts, the plate displacements according to relations (1), for $N=3$, are given by

$$u = \sum_0^3 \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!} (-1)^i [\Delta^i (W_{,x} + \Phi) + i\Delta^{i-1}\Omega_{,x}],$$

or

$$\begin{aligned} u &= \left(z - \frac{z^3}{3!} \Delta + \frac{z^5}{5!} \Delta^2 - \frac{z^7}{7!} \Delta^3 \right) (W_{,x} + \Phi) - \\ &\quad - \left(\frac{z^3}{3!} - 2 \frac{z^5}{5!} \Delta + 3 \frac{z^7}{7!} \Delta^2 \right) \Omega_{,x}, \\ v &= \left(z - \frac{z^3}{3!} \Delta + \frac{z^5}{5!} \Delta^2 - \frac{z^7}{7!} \Delta^3 \right) (W_{,y} + \psi) - \\ &\quad - \left(\frac{z^3}{3!} - 2 \frac{z^5}{5!} \Delta + 3 \frac{z^7}{7!} \Delta^2 \right) \Omega_{,y}, \\ w &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} \Delta + \frac{z^4}{4!} \Delta^2 - \frac{z^6}{6!} \Delta^3 \right) W - \left(\frac{z^2}{2!} - 2 \frac{z^4}{4!} \Delta + 3 \frac{z^6}{6!} \Delta^2 \right) \Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

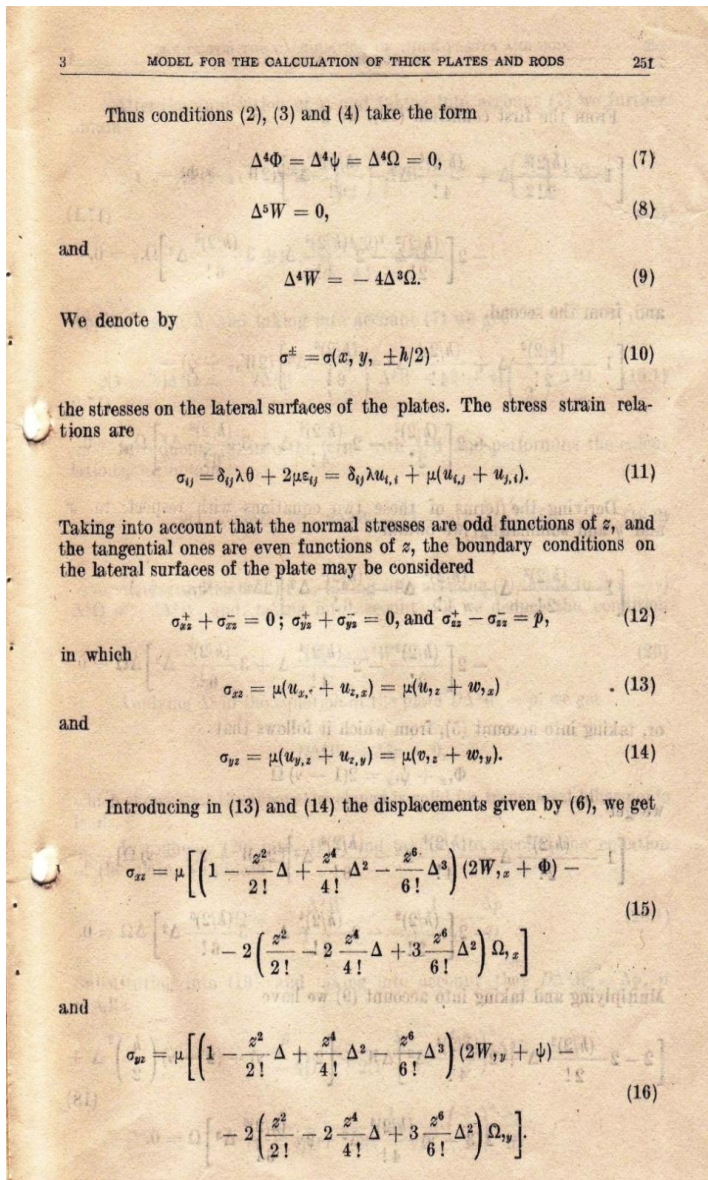
“ Ω (5), la rândul ei, este o funcție de Φ , Ψ și de coeficientul de contracție transversală ν ”. Acceptând aceste premize, am definit “Modelul general de placă groasă”, exprimând mai întâi deplasările u , v și w (6) pentru primii patru termeni ($N=0, \dots, 3$) ai sumelor (1), funcțiile Φ , Ψ , Ω (și implicit deplasările) urmând a fi explicitate, la rândul lor, în raport cu caracteristicile geometrice (h) fizice (E, ν) și mecanice (p) ale plăcilor.

În acest scop am ținut cont, că pentru placa sub sarcini normale pe planul median, $(p(x,y)=p)$, tensiunile tangențiale σ_{xz} , și σ_{yz} din suprafețele laterale $(z=\pm h/2)$ ale plăcii trebuie să fie nule, $\sigma_{xz}(\pm h/2)=0$, $\sigma_{yz}(\pm h/2)=0$ și am exprimat aceste tensiuni în funcție de deplasările u, v și w :

$$(13): \sigma_{xz} = \mu(u, z + W, x)$$

$$(14): \sigma_{yz} = \mu(v, z + W, y).$$

Înlocuind în (13) și (14) deplasările $(u, v$ și $w)$ din relațiile (6), au rezultat tensiunile din relațiile (15) și (16)



From the first condition (12), we get

$$\left[1 - \frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta + \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2 - \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3\right] (2W_x + \Phi) - 2 \left[\frac{(\hbar/2)^2}{2!} - 2 \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta + 3 \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^2 \right] \Omega_x = 0, \quad (17.1)$$

and, from the second,

$$\left[1 - \frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta + \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2 - \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3\right] (2W_y + \psi) - 2 \left[\frac{(\hbar/2)^2}{2!} - 2 \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta + 3 \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^2 \right] \Omega_y = 0. \quad (17.2)$$

Deriving the terms of these two equations with respect to x and y and summing, we obtain

$$\left[1 - \frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta + \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2 - \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3\right] (2\Delta w + \Phi_x + \psi_x) - 2 \left[\frac{(\hbar/2)^2}{2!} - 2 \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta + 3 \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^2 \right] \Delta \Omega = 0 \quad (17.3)$$

or, taking into account (5), from which it follows that

$$\Phi_x + \psi_x = 2(1 - \nu) \Omega \quad (17.4)$$

we get

$$\left[1 - \frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta + \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2 - \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3\right] [2\Delta W + 2(1 - \nu) \Omega] - 2 \left[\frac{(\hbar/2)^2}{2!} - 2 \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta + 3 \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^2 \right] \Delta \Omega = 0. \quad (17.5)$$

Multiplying and taking into account (9) we have

$$\left[2 - 2 \frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta + 2 \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2\right] \Delta W + \left[2(1 - \nu) - (2 - \nu) \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Delta + 2(3 - \nu) \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2 + 2\nu \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3\right] \Omega = 0. \quad (18)$$

și care în suprafețele laterale ale plăcii trebuie să fie nule. Din condițiile la limită pentru aceste tensiuni (la $z=\pm h/2$) și prelucrând convenabil relațiile (17.1) și (17.2) obținute, am dedus relația (20), care poate fi scrisă (amplificată cu rigiditatea D a plăcii), sub forma:

After the application of Δ , and taking into account (7) we further obtain

$$2(1 - \nu)\Delta\Omega = -2\Delta^2W + \left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^3W + (2 - \nu)\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^2\Omega + 2(1 + \nu)\frac{(h/2)^4}{4!}\Delta^4\Omega. \quad (19)$$

Applying again Δ , and taking into account (7) we get

$$2(1 - \nu)\Delta^2\Omega = -2\Delta^3W + \left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^4W + (2 - \nu)\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^3\Omega. \quad (19.1)$$

Introducing (9) into the term with Δ^4W and performing the calculations, we obtain

$$2(1 - \nu)\Delta^2\Omega = -2\Delta^3W - (2 + \nu)\left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^3\Omega. \quad (19.2)$$

A new application of Δ , taking into account (7), leads to $2(1 - \nu)\Delta^3\Omega = -2\Delta^4W$, and, taking into account (9), we deduce the condition

$$\Delta^3\Omega = \Delta^4W = 0. \quad (20)$$

Applying Δ^2 in the equation of the plate $D\Delta^2W = p$, we get

$$D\Delta^4W = \Delta^2p = 0,$$

which shows that the theory developed is valid for transversal biharmonic loads.

Introducing (20) into (19.2) and taking into account the equation of the plate, we obtain

$$\Delta^2\Omega = -\frac{\Delta^3W}{1 - \nu} = -\frac{1}{1 - \nu} \cdot \frac{\Delta p}{D}. \quad (20.1)$$

Substituting into (19), and taking into account that $D\Delta^2W = \Delta p$, it results

$$\Delta\Omega = -\frac{p}{(1 - \nu)D} - \frac{1}{2(1 - \nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2\Delta^3W = -\frac{p}{(1 - \nu)D} - \frac{1}{2(1 - \nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2\frac{\Delta p}{D}. \quad (21)$$

$$D\Delta^3\Omega = D(\Delta^2)^2W = 0 \quad (20)$$

Pe de altă parte, aplicând operatorul Δ^2 asupra ecuației plăcii, ($D\Delta^2W=p$), rezultă, în conformitate cu relația (20), că $D(\Delta^2)^2W = \Delta^2p = 0$,

ceea ce denotă că teoria dezvoltată este compatibilă pentru o varietate mare de sarcini, inclusiv biarmonice.

Performing the calculations in (18) and taking into account (20), we get

$$2\Delta W - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 [\Delta^2 W + 2\frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^4 W + 2(1-\nu)\Omega - (2-\nu)\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Delta\Omega + 2(3-\nu)\frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2\Omega] = 0. \quad (21.1)$$

Putting $\Delta^2 W = p/D$ and substituting $\Delta\Omega$ and $\Delta^2\Omega$ by (21.1) and (20.1), we have

$$\Omega = -\frac{1}{2(1-\nu)^2} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{p}{D} - \frac{\Delta W}{1-\nu} - \frac{5-2\nu}{12(1-\nu)^2} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^4 \Delta^2 W = -\frac{1}{2(1-\nu)^2} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{p}{D} - \frac{\Delta W}{1-\nu} - \frac{5-2\nu}{12(1-\nu)^2} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^4 \frac{\Delta p}{D}. \quad (21.2)$$

Developing the first equation (17), we obtain

$$2W_{,z} - 2\frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta W_{,z} + 2\frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2 W_{,z} - 2\frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3 W_{,z} + \Phi - \frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Delta\Phi + \frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta^2\Phi - \frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^3\Phi - 2\frac{(\hbar/2)^2}{2!} \Omega_{,z} + 4\frac{(\hbar/2)^4}{4!} \Delta\Omega_{,z} - 6\frac{(\hbar/2)^6}{6!} \Delta^2\Omega_{,z} = 0. \quad (22)$$

After the application of Δ^3 , and taking into account (20) it results

$$\Delta^3\Phi = -2\Delta^3 W_{,z} = -\frac{2\Delta p_{,z}}{D}, \text{ and } \Delta^3\psi = -2\Delta^3 W_{,y} = -\frac{2\Delta p_{,y}}{D}. \quad (22.1)$$

Also, applying again Δ^3 and taking into account (22.1) and (20.1) we obtain

$$\Delta^3\Phi = -2\frac{p_{,z}}{D} - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{\Delta p_{,z}}{D} \quad (22.2)$$

and

$$\Delta^3\psi = -2\frac{p_{,y}}{D} - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{\Delta p_{,y}}{D}.$$

Introducând (20) în (19.2) și ținând cont de ecuația plăcii, obținem relația (20.1). Introducând-o pe aceasta în relația (19) și ținând cont că $D\Delta^3 W = \Delta p$, rezultă, după efectuarea calculelor, expresia $\Delta\Omega$ (21). **Efectuând calculele** în (18) și ținând cont de condițiile (20), obținem relația (21.1). Luând în considerare ecuația plăcii și înlocuind $\Delta\Omega$ și $\Delta^2\Omega$ cu (21.1) și (20.1), **obținem Ω (21.2)**. Dezvoltând prima ecuație (17) obținem relația (22). După aplicarea operatorului Δ^3 și luând în considerare condiția (20) obținem expresia $\Delta^3\Phi$ (22.1). Aplicând din nou operatorul Δ^2 și ținând cont de relațiile (22.1) și (20.1) obținem expresia finală pentru $\Delta^2\Phi$ (22.2) și analog pentru $\Delta^2\Psi$.

Finally, applying Δ and performing the calculations, it results

$$\Delta\Phi = -2\Delta W_{,x} - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{p_{,x}}{D} - \frac{15-14\nu+5\nu^2}{12(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{\Delta p_{,x}}{D} \quad (22.3)$$

and in a similar way

$$\Delta\psi = -2\Delta W_{,y} - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{p_{,y}}{D} - \frac{15-14\nu+5\nu^2}{12(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{\Delta p_{,y}}{D} \quad (22.4)$$

Substituting all these relations into (17), we get

$$\Phi = -2W_{,x} - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Delta W_{,x} - \frac{5-2\nu}{3!(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{p_{,x}}{D} - \frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{5!(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2}\right)^6 \frac{\Delta p_{,x}}{D} \quad (23.1)$$

and similarly we have

$$\psi = -2W_{,y} - \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Delta W_{,y} - \frac{5-2\nu}{3!(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \frac{p_{,y}}{D} - \frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{5!(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2}\right)^6 \frac{\Delta p_{,y}}{D} \quad (23.2)$$

After substituting expressions (23), (22) and (21) into (6) we obtain the following expressions for displacements

$$u = -zW_{,x} - \frac{1}{1-\nu} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot z - (2-\nu) \cdot \frac{z^3}{3!} \right] \Delta W_{,x} - \left[\frac{5-2\nu}{6(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \cdot z - \frac{3-2\nu}{2(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{3-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{z^5}{5!} \right] \frac{p_{,x}}{D} - \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{5!(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2}\right)^6 \cdot z - \frac{20-31\nu+19\nu^2-5\nu^3}{12(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \right] \times \frac{z^3}{3!} + \frac{2-\nu}{(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \frac{z^5}{5!} - \frac{4-\nu}{1-\nu} \cdot \frac{z^7}{7!} \left] \frac{\Delta p_{,x}}{D} \quad (24.1)$$

În final, aplicând Δ și efectuând calculele, rezultă expresiile $\Delta\Phi$ (22.3) și analog, $\Delta\Psi$ (22.4).

Inlocuind aceste relații în (17), rezultă expresiile finale ale funcțiilor Φ (23.1) și Ψ (23.2).

În sfârșit, după înlocuirea expresiilor (23), (22) și (21) în relațiile deplasărilor u , v și w din (6), obținem forma finală a funcțiilor deplasărilor “ u ”, din (24.1),

$$v = -zW_{,yy} - \frac{1}{1-\nu} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot z - (2-\nu) \cdot \frac{z^3}{3!} \right] \Delta W_{,yy} -$$

$$- \left[\frac{5-2\nu}{6(1-\nu)^2} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^4 \cdot z - \frac{3-2\nu}{2(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{3-\nu}{1-\nu} \frac{z^5}{5!} \right] \frac{p_{,yy}}{D} -$$

$$- \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{5!(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2} \right)^6 \cdot z - \frac{20-31\nu+19\nu^2-5\nu^3}{12(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2} \right)^4 \cdot z^3 \right. \times$$

$$\left. \times \frac{z^3}{3!} + \frac{2-\nu}{(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{z^5}{5!} - \frac{4-\nu}{1-\nu} \frac{z^7}{7!} \right] \frac{\Delta p_{,yy}}{D} \quad (24.2)$$

$$w = W + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{z^2}{2!} \Delta W + \left[\frac{1}{2(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{z^4}{4!} \right] \frac{p}{D} +$$

$$+ \left[\frac{5-2\nu}{12(1-\nu)^3} \left(\frac{h}{2} \right)^4 \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{(1-\nu)^2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{z^4}{4!} + \frac{2+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{z^6}{6!} \right] \frac{\Delta p}{D} \quad (24.3)$$

The dilatation function will be

$$\theta = u_{,xx} + v_{,yy} + w_{,zz} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left\{ -z\Delta W - \left[\frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot z - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{z^3}{3!} \right] \cdot \frac{12p(1-\nu^2)}{Eh^3} - \left[\frac{5-2\nu}{12(1-\nu)^2} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^4 \cdot z - \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \frac{z^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \frac{z^5}{5!} \right] \frac{12\Delta p(1-\nu^2)}{Eh^3} \right\} \quad (25)$$

2.2. STRESSES

The stresses will be calculated by means of the relations

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\theta + 2\mu\epsilon_{ij} = \delta_{ij}\lambda\theta + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (26)$$

or

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta + \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

or finally

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \theta + \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \quad (27)$$

“v” (24.2), “w” (24.3) și în consecință, funcția dilatării, $\theta = u_{,xx} + v_{,yy} + w_{,zz}$, din (25).

2.2. TENSIUNILE

se calculează cu ajutorul relațiilor cunoscute, (26):

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\theta + 2\mu\epsilon_{ij},$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda\theta + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

în care λ și μ sunt coeficienții lui Lamé, $\lambda = E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$

$$\text{și } \mu = E/2(1+\nu)$$

Thus

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \theta + u_{,xx} \right] \quad (27.1)$$

from which, introducing θ and $u_{,xx}$ we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ z(W_{,xx} + \nu W_{,yy}) + \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{z}{h} - \frac{2-\nu}{6} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] h^3 \Delta W_{,xx} \right\} - \\ & - \left[\frac{3\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} - 2\nu \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] p - \left[\frac{5-2\nu}{8(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \right. \\ & + \left. \frac{3-\nu}{10} \left(\frac{z}{h} \right)^5 \right] \cdot h^2 p_{,xx} - \left[\frac{\nu(5-2\nu)}{16(1-\nu)^2} \cdot \frac{z}{h} - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \right. \\ & + \left. \frac{\nu}{10} \left(\frac{z}{h} \right)^5 \right] h^2 \Delta p - \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{640(1-\nu)^2} \cdot \frac{z}{h} - \right. \\ & - \left. \frac{20-31\nu+19\nu^2-5\nu^3}{96(1-\nu)^2} \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \frac{2-\nu}{40(1-\nu)} \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^5 - \right. \\ & - \left. \frac{4-\nu}{420} \left(\frac{z}{h} \right)^7 \right] h^4 \Delta p_{,xx}. \quad (28) \end{aligned}$$

The maximum stresses σ_{xx} , appear in the lateral surfaces, for $z=h/2$, for which

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,max} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{h}{2} (W_{,xx} + \nu W_{,yy}) + \frac{4+\nu}{48} h^3 \Delta W_{,xx} \right\} - \\ & - \frac{\nu(2+\nu)}{4(1-\nu)} p - \frac{73-24\nu+\nu^2}{320(1-\nu)} h^2 p_{,xx} - \frac{\nu(4-12\nu+\nu^2)}{320(1-\nu)^2} h^2 \Delta p - \\ & - \frac{3342-4121\nu+2528\nu^2-699\nu^3}{53.760(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,xx} \quad (29) \end{aligned}$$

and analogously

$$\begin{aligned} \sigma_{yy,max} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{h}{2} (W_{,yy} + \nu W_{,xx}) + \frac{4+\nu}{48} h^3 \Delta W_{,yy} \right\} - \frac{\nu(2+\nu)}{4(1-\nu)} p - \\ & - \frac{73-24\nu+\nu^2}{320(1-\nu)} h^2 p_{,yy} - \frac{\nu(41-12\nu+\nu^2)}{320(1-\nu)^2} h^2 \Delta p - \\ & - \frac{3342-4121\nu+2528\nu^2-699\nu^3}{53.760(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,yy}. \quad (30) \end{aligned}$$

Astfel, tensiunea σ_{xx} din (27.1) devine, după introducerea funcțiilor θ și $u_{,xx}$ cea din relația (28).

Tensiunea normală maximă

$\sigma_{xx,max}$ din suprafața

laterală, pentru $z=h/2$

devine cea din relația (29) și

analog, $\sigma_{yy,max}$, cea din (30).

Assuming that $p = p(x, y)$ and hence $\Delta p = p_{,xx} + p_{,yy}$, we can write further

$$\begin{aligned} \sigma_{xx, \max} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{h}{2} (W_{,xx} + \nu W_{,yy}) + \frac{4+\nu}{48} h^3 \Delta W_{,xx} \right\} - \frac{\nu(2+\nu)}{4(1-\nu)} p - \\ & - \frac{73-56\nu+13\nu^2}{320(1-\nu)^2} h^2 p_{,xx} - \frac{\nu(41-12\nu+\nu^2)}{320(1-\nu)^2} h^2 p_{,yy} - \\ & - \frac{3342-4121\nu+2528\nu^2-699\nu^3}{53.760(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,xx} \end{aligned} \quad (31)$$

and in a similar way we have

$$\begin{aligned} \sigma_{yy, \max} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{h}{2} (W_{,yy} + \nu W_{,xx}) + \frac{4+\nu}{48} h^3 \Delta W_{,yy} \right\} - \frac{\nu(2+\nu)}{4(1-\nu)} p - \\ & - \frac{73-56\nu+13\nu^2}{320(1-\nu)^2} h^2 p_{,yy} - \frac{\nu(41-12\nu+\nu^2)}{320(1-\nu)^2} h^2 p_{,xx} - \\ & - \frac{3342-4121\nu+2528\nu^2-699\nu^3}{53.760(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,yy} \end{aligned} \quad (32)$$

The stress σ_{xy} will be calculated by means of the relation

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{,y} + v_{,x}) \quad (32.1)$$

which becomes

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ z(1-\nu) W_{,xy} + \left[\frac{1}{4} \frac{z}{h} - \frac{2-\nu}{6} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] h^3 \Delta W_{,xy} \right\} - \\ & - \left[\frac{5-2\nu}{8(1-\nu)} \frac{z}{h} - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{3-\nu}{10} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] h^2 p_{,xy} - \\ & - \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{640(1-\nu)^2} \frac{z}{h} - \frac{20-31\nu+19\nu^2-5\nu^3}{96(1-\nu)^2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2-\nu}{40(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^3 - \frac{4-\nu}{420} \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] h^4 \Delta p_{,xy} \end{aligned} \quad (33)$$

Ținând cont de funcția sarcinii
 $p=p(x,y)$ și de $\Delta p=p_{,xx}+p_{,yy}$,
 tensiunile normale maxime

$\sigma_{xx, \max}$ și $\sigma_{yy, \max}$

pot fi scrise sub forma relațiilor
 (31) și (32).

Analog se determină și tensiunea
 tangențială σ_{xy} cu ajutorul
 relației (32.1):

$\sigma_{xy}=E(u_{,y}+v_{,x})/2(1+\nu)$,
 și care devine cea din (33).

The maximum stresses σ_{xy} appear for $z = h/2$, for which

$$\sigma_{xy \max} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{2} (1-\nu) h W_{,xy} + \frac{4+\nu}{48} h^3 \Delta W_{,xy} \right\} - \frac{73-24\nu+\nu^2}{320(1-\nu)} h^2 p_{,xy} - \frac{3342-4121\nu+2528\nu^2-699\nu^3}{53760(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,xy}. \quad (34)$$

The tangential stresses σ_{xz} will be calculated by means of the relation

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} (w_{,xz} + u_{,xz}) \quad (34.1)$$

which becomes

$$\sigma_{xz} = -\frac{E}{8(1-\nu^2)} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] h^2 \Delta W_{,xz} - \left[\frac{5-2\nu}{16(1-\nu)} - \frac{3(2-\nu)}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] h p_{,xz} - \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{320(1-\nu)^2} - \frac{25-33\nu+19\nu^2-5\nu^3}{16(1-\nu)^2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{3-\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{z}{h} \right)^6 \right] \frac{h^3}{4} \Delta p_{,xz} \quad (35)$$

and in a similar manner

$$\sigma_{zy} = -\frac{E}{8(1-\nu^2)} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] h^2 \Delta W_{,zy} - \left[\frac{5-2\nu}{16(1-\nu)} - \frac{3(2-\nu)}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] h p_{,zy} + \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{320(1-\nu)^2} - \frac{25-33\nu+19\nu^2-5\nu^3}{16(1-\nu)^2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 + \frac{3-\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{z}{h} \right)^6 \right] \frac{h^3}{4} \Delta p_{,zy}. \quad (36)$$

The maximum tangential stresses appear in the middle plane, for $z = 0$

$$\sigma_{xz \max} = -\frac{E h^2 \Delta W_{,xz}}{8(1-\nu^2)} - \frac{5-2\nu}{16(1-\nu)} h p_{,xz} - \frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{1280(1-\nu)^2} h^3 \Delta p_{,xz} \quad (37)$$

and

$$\sigma_{zy \max} = -\frac{E h^2 \Delta W_{,zy}}{8(1-\nu^2)} - \frac{5-2\nu}{16(1-\nu)} h p_{,zy} - \frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{1280(1-\nu)^2} h^3 \Delta p_{,zy}. \quad (38)$$

Tensiunea tangențială maximă

$\sigma_{xy, \max}$ pentru $z=h/2$ va lua forma celei din relația (34).

Tensiunea tangențială σ_{zx} , se calculează în conformitate cu relația (34.1):

$\sigma_{zx} = E(w_{,xz} + u_{,xz}) / 2(1+\nu)$ și care capătă forma celei din (35), iar

σ_{zy} celei din (36).

Tensiunile tangențiale maxime din punctele planului median, pentru $z=0$, au fost redată în relațiile (37) și (38).

2.3. THE RESULTING COUPLES AND FORCES ACROSS THE THICKNESS OF THE PLATE AND PER UNIT LENGTH OF THE SECTION

The resulting couples and shear forces are obtained on the basis of the static equivalence. Thus

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (W_{,xx} + \nu W_{,yy}) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz + h^3 \Delta W_{,xx} \left[\frac{1}{4h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz - \frac{2-\nu}{6h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz \right] - p \left[\frac{3\nu}{2(1-\nu)h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz - \frac{2\nu}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz \right] - h^2 p_{,xx} \left[\frac{5-2\nu}{8(1-\nu)h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz + \frac{3-\nu}{10h^5} \int_{-h/2}^{h/2} z^6 dz \right] - h^2 \Delta p \left[\frac{\nu(5-2\nu)}{16(1-\nu)^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz - \frac{\nu}{4(1-\nu)h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz + \frac{\nu}{10h^5} \int_{-h/2}^{h/2} z^6 dz \right] - h^4 \Delta p_{,xx} \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{640(1-\nu)^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz - \frac{20-31\nu+19\nu^2-5\nu^3}{96(1-\nu)^2 \cdot h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz + \frac{2-\nu}{40(1-\nu)h^5} \int_{-h/2}^{h/2} z^6 dz - \frac{4-\nu}{420h^7} \int_{-h/2}^{h/2} z^8 dz \right] \right\} \quad (39)$$

in which

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^4 dz = \frac{h^5}{80}; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^6 dz = \frac{h^7}{448} \quad \text{and} \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^8 dz = \frac{h^9}{2304} \quad (40)$$

Introducing (40) into (39) and performing the calculations, it results

$$M_{xx} = -D(W_{,xx} + \nu W_{,yy} + \frac{8+\nu}{40} h^2 \Delta W_{,xx}) - \frac{\nu(4+\nu)}{40(1-\nu)} h^2 p - \frac{583-208\nu+3\nu^2}{13.440(1-\nu)} h^4 p_{,xx} - \frac{\nu(311-104\nu+3\nu^2)}{13.440(1-\nu)^2} h^4 \Delta p - \frac{11570-14769\nu+9120\nu^2-2519\nu^3}{967.680(1-\nu)^2} h^6 \Delta p_{,xx} \quad (41)$$

2.3. Momentele încovoietoare M_{xx} , M_{yy} și de răsucire M_{xy} și forțele tăietoare Q_{zx} și Q_{zy} , pe unitate de lungime din secțiunea plăcii, se calculează în conformitate cu ecuațiile de echivalență din secțiune. În final, expresiile acestora corespund relațiilor (39) sau (41) pentru momentul M_{xx} ,

and in a similar manner

$$M_{yy} = -D \left(W_{,yy} + \nu W_{,xx} + \frac{8+\nu}{40} h^2 \Delta W_{,yy} \right) - \frac{\nu(4+\nu)}{40(1-\nu)} h^2 p -$$

$$- \frac{583 - 208\nu + 3\nu^2}{13.440(1-\nu)} h^4 p_{,yy} - \frac{\nu(311 - 104\nu + 3\nu^2)}{13.440(1-\nu)^2} h^4 \Delta p -$$

$$- \frac{11.570 - 14769\nu + 9120\nu^2 - 2519\nu^3}{967.680(1-\nu)^2} h^6 \Delta p_{,yy}; \quad (42)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = -D \left[(1-\nu) W_{,xy} + \frac{8+\nu}{40} h^2 \Delta W_{,xy} \right] -$$

$$- \frac{583 - 208\nu + 3\nu^2}{13.440(1-\nu)} h^4 p_{,xy} - \frac{11.570 - 14769\nu + 9120\nu^2 - 2519\nu^3}{967.680(1-\nu)^2} h^6 \Delta p_{,xy} \quad (43)$$

and the shear forces will be

$$Q_{xz} = -Q_{zx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = -D \Delta W_{,x} - \frac{8-3\nu}{40(1-\nu)} h^2 p_{,x} -$$

$$- \frac{1516 - 2010\nu + 1264\nu^2 - 350\nu^3}{26.880(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,x}, \quad (44)$$

and analogously

$$Q_{zy} = -D \Delta W_{,y} - \frac{8-3\nu}{40(1-\nu)} h^2 p_{,y} - \frac{1516 - 2010\nu + 1264\nu^2 - 350\nu^3}{26.880(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,y}. \quad (45)$$

The function W satisfies the equation of the plate

$$D \Delta^2 W = p, \quad (46)$$

in which

$$D = EI/(1-\nu^2); E = 2\mu(1+\nu); I = h^3/12, \quad (47)$$

and the load $p(x, y)$ is a biharmonic function

$$\Delta^2 p = 0. \quad (48)$$

(42) pentru momentul **M_{yy}** ,

(43) pentru momentul de
torsiune **M_{xy}** ,

(44) pentru forța tăietoare
 Q_{xz} și (45) pentru forța
tăietoare **Q_{zy}** .

Funcția W satisface ecuația
plăcii, (46): **$D \Delta^2 W = p$** , în
care, **$D = EI/(1-\nu^2)$** ; **$I = h^3/12$** ,
iar **sarcina $p(x, y)$** poate fi
reprezentată în cel mai
general caz, printr-o
funcție biarmonică.

Modelul propus corespunde deci unei plăci cu grosime relativă (h/a), sub încărcarea unei sarcini inclusiv biarmonice și cuprinde intrinsec, prin particularizare, toate teoriile cunoscute. Astfel, de exemplu, pentru tensiunile normale într-un punct al plăcii, expresia acestora este de

forma: $\sigma_{xx} = Ez(W_{,xx} + \nu W_{,yy} + C_1 \Delta W_{,xx}) / (1 - \nu^2) + C_2 p + C_3 p_{,xx} + C_4 \Delta p + C_5 \Delta p_{,xx}$. (1), și cuprinde 7 termeni, din care doar primii doi sunt funcții liniare de z , (cota curentă a punctului de calcul din placă, în raport cu planul ei median) și în care:

E – modulul de elasticitate longitudinală a materialului plăcii,

ν - coeficientul de contrație transversală a plăcii,

W , funcția deplasării unui punct din planul median,

$W_{,xx}$ – derivata de ordinul 2 în raport cu x a f-ției deplasării

$W_{,yy}$ – derivata de ordinul 2 în raport cu y a f-ției deplasării

$\Delta W_{,xx}$ –derivata de ord. 2 în raport cu x a Laplasianului W

p – funcția încărcării, perpendiculară pe planul plăcii,

$p_{,xx}$ - derivata de ordinul 2 în raport cu x a f-ției încărcării

Δp – Laplasianul funcției încărcării,

$\Delta p_{,xx}$ – derivata de ord. 2 în raport cu x a Laplasianului p .

C_1, C_2, C_3, C_4 și C_5 , sunt expresii funcție de coeficientul de contracție transversală ν (și puteri ale lui) și de raportul z/h (și puteri impare ale lui). Astfel,

$$C_1 = [0,25(z/h) - (2-\nu)(z/h)^3/6]h^3,$$

Coeficienții C_i (1...5)

$$C_1 = \frac{h^2}{4} z - \frac{2-\nu}{6} z^3$$

$$C_2 = \nu \left[\frac{3}{2(1-\nu)} \frac{z}{h} - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$$

$$C_3 = \left[\frac{5-2\nu}{8(1-\nu)} \frac{z}{h} - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \frac{3-\nu}{10} \left(\frac{z}{h} \right)^5 \right] h^2$$

$$C_4 = \left[\frac{\nu(5-2\nu)}{16(1-\nu)^2} \frac{z}{h} - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \frac{\nu}{10} \left(\frac{z}{h} \right)^5 \right] h^2$$

$$C_5 = \left[\frac{111-147\nu+91\nu^2-25\nu^3}{640(1-\nu)^2} \frac{z}{h} - \frac{20-31\nu+19\nu^2-5\nu^3}{96(1-\nu)^2} \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \frac{2-\nu}{40(1-\nu)} \left(\frac{z}{h} \right)^5 - \frac{4-\nu}{420} \left(\frac{z}{h} \right)^7 \right] h^4$$

În relația (1), **primii doi termeni** corespund expresiei tensiunii normale din teoria **Sophiei Germaine** (1816) și **Louis Navier** (1820 și 1823) pentru cazul încovoierii plăcilor subțiri,

Sophie Germaine

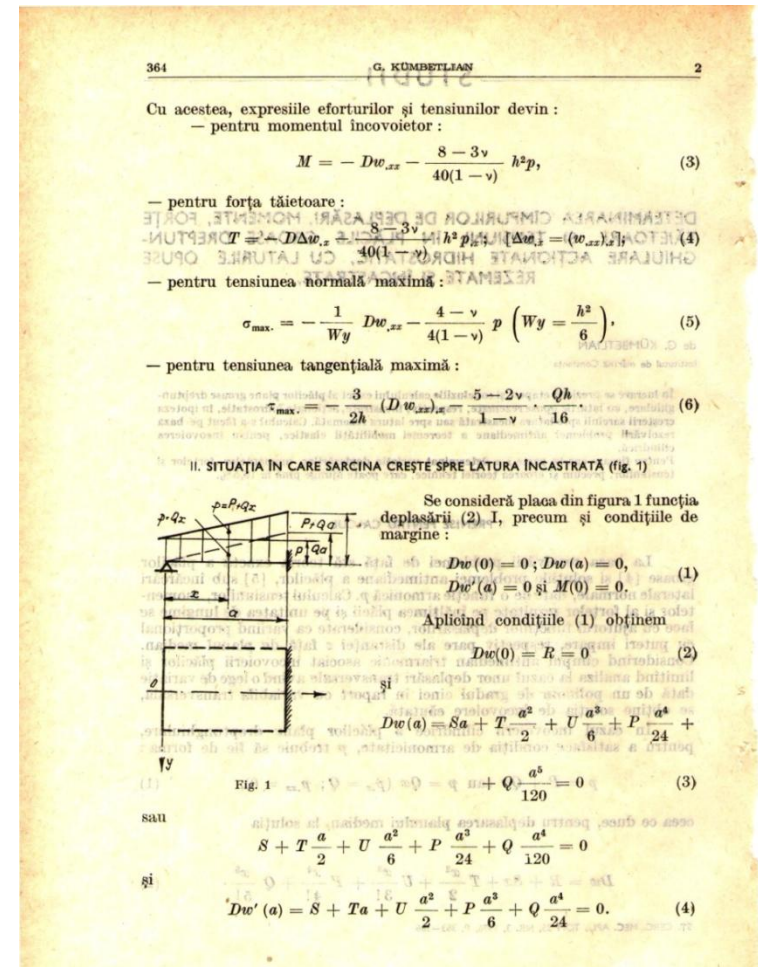
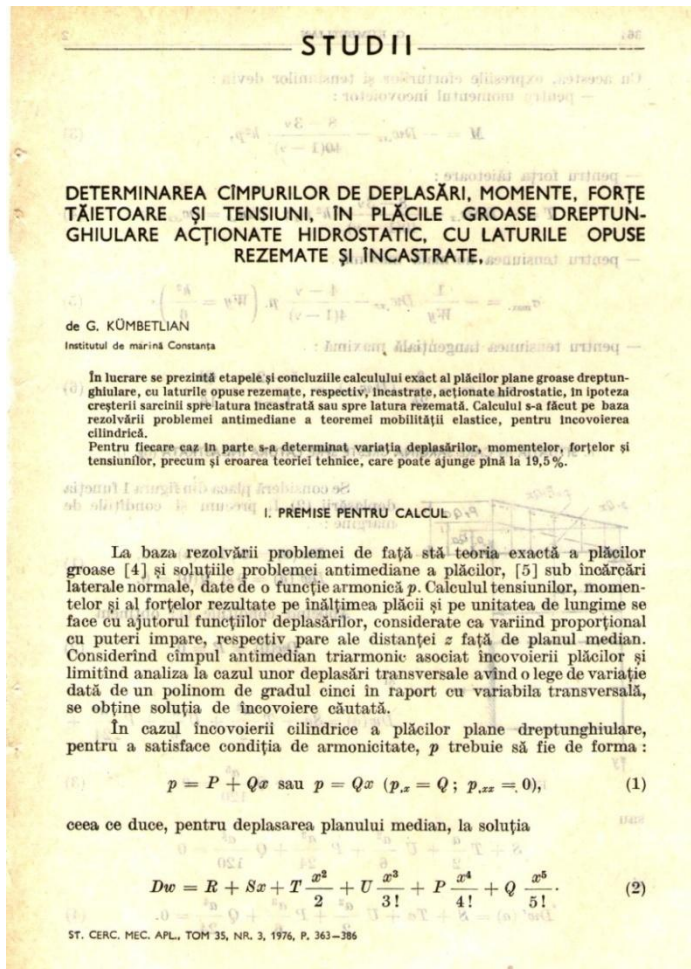


Louis Navier



primii cinci termeni, expresiei tensiunii normale din „teoria exactă” a lui M.Mișicu pentru plăcile groase sub **sarcini armonice**, iar **toți termenii**, expresiei tensiunii normale (1), corespunzătoare „modelului general de placă groasă” sub sarcini inclusiv biarmonice. **Teoria plăcilor groase (și mai ales dreptunghiulare)**, își găsește aplicații în analiza distribuției tensiunilor din plăcile de corp ale **navelor militare**. În acest sens am abordat pentru început cazul mai simplu al încovoierii cilindrice (unidimensionale) și am rezolvat câteva cazuri de plăci groase dreptunghiulare sub acțiunea unor sarcini uniform distribuite și/sau hidrostatice.

Cazul încovoierii cilindrice a plăcilor groase cu două laturi opuse (\parallel cu Ox) libere și celelalte două (\parallel cu Oy) rezemat-încastate sau ambele încastate, sub sarcini uniform și/sau liniar distribuite.



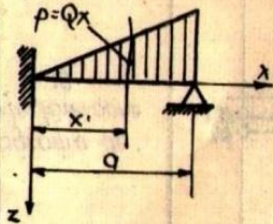
Câteva cazuri particulare:

Tabelul 1

 înconvoierea unidimensională a plăcilor cu grindă echivalentă static nedeterminată și eroarea teoriei clasice pentru $\nu=1/2$ și $h/a=1/5$

Nr. crt.	Schema plăcii	Cîmpul deplasărilor	Cîmpul forțelor tăietoare $T_P = \varphi_P P a$ și $T_Q = \varphi_Q Q a^2$		Cîmpul de momente $M_P = \mu_P P a^2$ și $M_Q = \mu_Q Q a^3$			
1		$p = P + Qx$ $Dw = \frac{P}{24}(x^4 - 2ax^3 + a^2x^2) + \frac{Q}{120}(x^5 - 3a^2x^3 + 2a^3x^2)$	$\varphi_Q = -\frac{1}{40} \left[20 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - (6 - K^2) \right]$	$\mu_Q = -\frac{1}{120} \left[20 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3(6 - K^2) \frac{x}{a} + 4 \right]$	$\varphi_{Q_0} = \frac{6 - K^2}{40}$	8,67%	$\mu_{Q_0} = -\frac{1}{30}$	-
			$(x/a)_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{6 - K^2}{20}}$	4,47%	$\mu_{Q_{\max}} = -\frac{1}{120} \left[4 - \sqrt{\frac{(6 - K^2)^3}{5}} \right]$	32,3%		
			$\varphi_{Qa} = -\frac{14 - K^2}{40}$	3,72%	$\mu_{Qa} = -\frac{2 + K^2}{40}$	26%		
2		<p>a. $p = P; Q = 0$</p> $Dw_P = \frac{P}{240} \left[10x^4 - \frac{3}{2}(10 - K^2)ax^3 - 3K^2a^2x^2 + \frac{1}{2}(3K^2 + 10)a^3x \right]$	$\varphi_P = -\frac{1}{80} \left[80 \frac{x}{a} - 3(10 - K^2) \right]$	$\mu_P = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{3}{40}(10 - K^2) \frac{x}{a} \right]$	$\varphi_{P_0} = \frac{3(10 - K^2)}{80}$	5,2%	$\mu_{P_0} = 0$	-
			$(x/a)_{\varphi=0} = \frac{3(10 - K^2)}{80}$	5,2%	$\mu_{P_{\max}} = \frac{9(10 - K^2)^2}{12800}$	10,2%		
			$\varphi_{Pa} = -\frac{50 + 3K^2}{80}$	3,12%	$\mu_{Pa} = -\frac{10 + 3K^2}{80}$	15,6%		

3



$$b. \quad p = Qx; \quad P = 0$$

$$Dw_Q = \frac{Q}{120} (x^5 - 2a^2x^3 + a^4x)$$

$$p = Qx$$

$$Dw = \frac{Q}{480} [4x^5 - 3(6 + K^2)a^2x^3 + (14 + 3K^2)a^3x^2]$$

$$\varphi_Q = -\frac{1}{40} \left[20 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - (4 - K^2) \right]$$

$$\varphi_{Q_0} = \frac{4 - K^2}{40}$$

$$(x/a)_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{4 - K^2}{20}}$$

$$\varphi_{Qa} = -\frac{16 + K^2}{40}$$

$$\varphi = -\frac{1}{80} \left[40 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - (18 + K^2) \right]$$

$$\varphi_0 = \frac{18 + K^2}{80}$$

$$(x/a)_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{18 + K^2}{40}}$$

$$\varphi_0 = -\frac{22 - K^2}{80}$$

$$\mu_Q = -\frac{1}{120} \left[20 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3(4 - K^2) \frac{x}{a} \right]$$

$$\mu_{Q_0} = 0$$

$$\mu_{Q_{\max}} = \frac{1}{120} \sqrt{\frac{(4 - K^2)^3}{5}}$$

$$\mu_{Qa} = -\frac{8 + 3K^2}{120}$$

$$\mu = -\frac{1}{240} \left[40 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3(18 + K^2) \cdot \frac{x}{a} + (14 + 3K^2) \right]$$

$$\mu_0 = -\frac{14 + 3K^2}{240}$$

$$\mu_{\max} = -\frac{1}{240} \left[14 + 3K^2 - \sqrt{\frac{(18 + K^2)^3}{10}} \right]$$

$$\mu_a = 0$$

13%

6,9%

3,25%

2,89%

1,25%

2,36%

-

19,36%

19,5%

11%

5%

-

Pentru fiecare caz în parte am stabilit expresiile
forțelor tăietoare: $T = \varphi Pa$ (sau: φQa^2) (2)
și momentelor încovoietoare: $M = \mu Pa^2$ (sau: μQa^3) (3)
în care φ și μ sunt coeficienți numerici în funcție de:

$$k^2 = (8 - 3\nu)(h/a)^2 / (1 - \nu) \quad (4)$$

adică de patratul grosimii relative (h/a) a plăcii,
ceea ce deosebește plăcile groase de cele subțiri, al
cărora calcul nu depinde de grosimea relativă (h/a).

Sarcinile din relații sunt: $P[\text{daN/cm}^2] = P(\text{tot})/ab$ (5)

$$\text{și } Qa[\text{daN/cm}^2] = 2Q(\text{tot})/ab \quad (6)$$

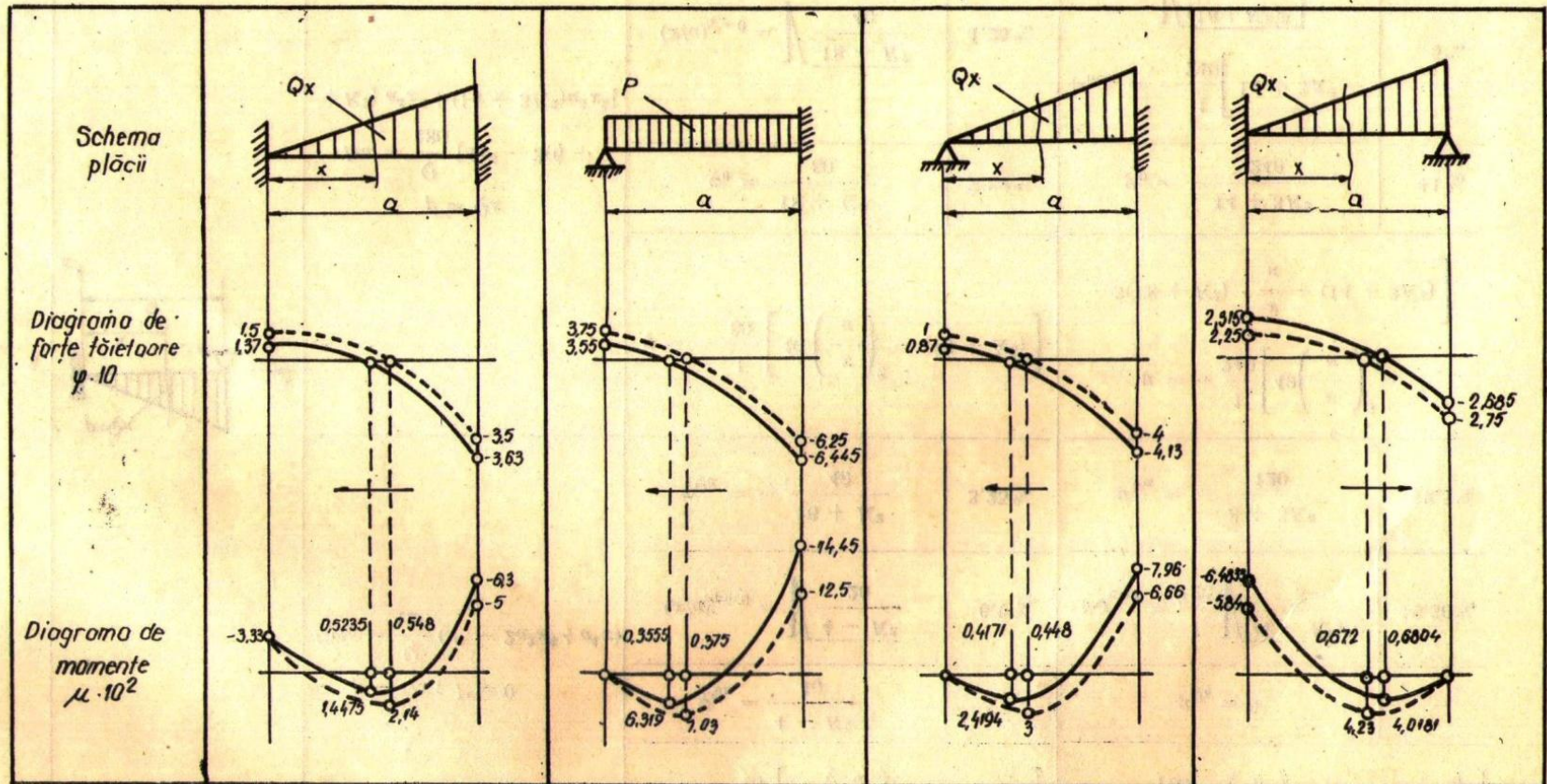
În continuare am calculat și construit diagramele de
forțe tăietoare (T) și momente încovoietoare (M).

Diagramele de variație a **T** (10φ) și **M** (100μ)

- cu linie întreruptă, în ipoteza de placă subțire și
- cu linie continuă, în ipoteza de placă groasă.

Tabelul 2

Diagramele de forțe tăietoare și momente încovoietoare în teoria exactă (cu linie continuă, pentru $\nu=1/2$ și $h/a=1/5$) și în teoria clasică (cu linie întreruptă).



În timp ce în cazul plăcilor “subțiri” diagramele de forțe tăietoare (**T**) și momente încovoietoare (**M**) (reprezentate cu linie întreruptă) depind **exclusiv** de geometria, condițiile de margine și încărcarea plăcii, în cazul plăcilor considerate “groase”, valorile forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare din diagramele **T** și **M** (reprezentate cu linie continuă) depind **inclusiv** de patrutul grosimii relative (**h/a**) a plăcii.

Pentru o grosime relativă **h/a de 1/5** și un coeficient de contracție transversală **v de 0,5**, diferențele dintre valorile momentelor încovoietoare, față de cele din teoria de placă subțire ajung până la un procent de 32,3%. În cazul plăcii cu două laturi opuse încastrate, sub sarcină uniform distribuită (**P**), momentul încovoietor în secțiunea din încastrare este **$M = \mu Pa^2$** , în care **$\mu = (1/12) + (k^2/40)$** (7)

În cazul plăcilor subțiri, $h \ll a$, $h/a \rightarrow 0$, $k^2 \rightarrow 0$ și deci $\mu_{\text{pl.subț.}} = (1/12)$, cunoscut din R.M. În relația (7), termenul $k^2/40$ reprezintă sporul care se adaugă valorii momentului încovoietor din încastrarea plăcii considerate subțiri, $(1/12)$, spor datorat “naturii de placă groasă” cu grosimea relativă h/a . Diferența (în %) dintre coeficienții adimensionali ai momentelor încovoietoare corespunzătoare celor două teorii

este: $\delta\% = (\mu_{\text{pl.gr.}} - \mu_{\text{pl.subț.}}) 100 / \mu_{\text{pl.subț.}}$, adică:

$$\delta\% = [(k^2/40)/(1/12)] 100 = 12k^2 100/40 = 30k^2 = 30(8-3\nu)(h/a)^2/(1-\nu)$$

De exemplu, pentru $\nu = 0,5$, valorile acesteia sunt: pentru o grosime relativă $h/a = 1/5$ de 15,6%, pentru $1/10$ de 3,9% și pentru o grosime relativă de $1/20$ de 0,975% (sub 1% !!!).

Aceste valori ne-ar îndreptăți, să clasificăm plăcile după criteriul grosimii relative a lor, în plăci subțiri, pentru $h/a < 1/20$ și plăci groase, pentru $h/a > 1/20$.

În continuare am rezolvat problema încovoierii generale a plăcilor cu dublă curbură **sinclastice**, convexe sau concave, cu curbură Gauss $K=K_1K_2>0$, și anume:

- 1). **cu toate marginile rezemate,**
- 2). **cu două margini opuse rezemate și celelalte două încastrate și**
- 3). **cu trei margini rezemate și una încastrată,** deplasările fiind exprimate în acest caz cu ajutorul unor serii trigonometrice simple de tip Maurice Lévy.

De exemplu, pentru placa cu două margini opuse simplu rezemate și celelalte două încastrate, sub sarcină hidrostatică:

EXACT CALCULATION OF THE PLANE RECTANGULAR, HYDROSTATICALLY-ACTED PLATES, WITH TWO OPPOSITE EDGES SIMPLY SUPPORTED AND THE OTHER TWO RIGIDLY CLAMPED ON THE BASIS OF SOLVING ANTIMEDIAN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTIC MOBILITY

by G. KUMBETLIAN*

The paper performs the exact calculation of the plane rectangular, hydrostatically acted plates, one with two opposite simply supported edges and the other two rigidly clamped on the basis of elastic mobility.

Within this calculation the field of displacements, bending couples, shear forces, reactions and stresses have been determined. A number of calculations were also performed for the bending couples M_{yy} in the case of the rigidly clamped edge.

From these results it may be observed that the technical theory presents considerable maximum errors which vary for $\nu = 3a/4$ and for the plate with the relative thickness $h/a = 1/5$, from 34.7% for edges ratio $b/a = 2$, to 41% in the case of quadratic plate. These conclusions justify the exact calculation whenever we are looking for a rational use of the material in the conditions of an adequate strength of the plate.

1. CALCULATION OF ADDITIONAL DISPLACEMENTS

The solving of the problem is performed according to the exact theory of thick shells [4] and on the solutions of antimedian problem of the plates under lateral normal loads [5] given from an harmonic function $p + q \frac{x}{a}$.

For this purpose, we consider the plate in figure 1 under action of hydrostatic load $q \frac{x}{a}$ and we superpose over the solution of the simply supported plate the solution for the plate with bending couples on the rigidly clamped edges ($Y = \pm \frac{b}{2}$) so that the rotations of these be zero. So, we consider the expression of displacement for the simply supported plate under hydrostatic load

$$Dw = qa^4 \sum_1^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} (1 + m^2 l^2) + A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B'_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (1)$$

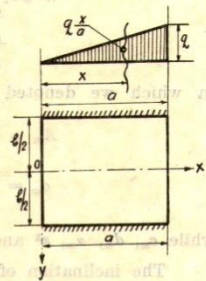


Fig. 1

* Marine Institute, Constanța.

in which,

$$A'_m = -b'_m(2a_m + d_m) \quad \text{and} \quad B'_m = b'_m \cdot c_m, \quad (2)$$

where,

$$a_m = 1 + m^2 l^2 \quad \text{and} \quad b'_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^2 m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (3)$$

$$c_m = \frac{1 + m^2 s^2 (1 + m^2 l^2)}{1 + m^2 s^2} \quad \text{and} \quad d_m = (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) c_m.$$

According to (17), §5, p. 32 [6], we denoted

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (4)$$

with (10), §7, p. 56 [6]

$$s^2 = \frac{8 + \nu}{40} \left(\frac{\pi h}{a} \right)^2 \quad (5)$$

and with (9) §6 p. 48 [6]

$$l^2 = \frac{8 - 3\nu}{40(1 - \nu)} \left(\frac{\pi h}{a} \right)^2 \quad (6)$$

With these, displacement (1) takes the form

$$Dw = qa^4 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi^5 m^5} \left[2(-1)^{m+1}(1 + m^2 l^2) + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (7)$$

in which we denoted

$$A_m = -b_m(2a_m + d_m); \quad B_m = b_m \cdot c_m, \quad (8)$$

$$a_m = 1 + m^2 l^2 \quad \text{and} \quad b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\operatorname{ch} \alpha_m}$$

while c_m , d_m , α_m , s^2 and l^2 are in agreement to (3)-(6).

The inclination of the median fibre of the plate on the $y = \frac{b}{2}$ edge, will be:

$$Dw_{,y} \left(\nu = \frac{b}{2} \right) = qa^3 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi^4 m^4} [A_m \operatorname{sh} \alpha_m + B_m (\operatorname{sh} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m)] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (9)$$

We annull this inclination and satisfy the boundary conditions with assistance of any additionally bending couples

$$M_{yy} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}; \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (10)$$

which must produce an inclination equal but contrary in sign to the above one (9).

According to formula (12), § 7, p. 56 [6], it results the inclination owing to couples:

$$Dw_{M, y(\pm \frac{b}{2})} = \frac{a}{2\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{E_m}{m(1+m^2s^2)} [\text{th } \alpha_m (\alpha_m \text{th } \alpha_m - 1) - \alpha_m] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (11)$$

in which, also,

$$s^2 = \frac{8+\nu}{40} \left(\frac{\pi h}{a} \right)^2 \quad (12)$$

Writing that

$$w_{,y} = -w_{M,y} \quad \left(y = \frac{b}{2} \right) \quad (13)$$

we obtain

$$E_m = \frac{2qa^2}{\pi^3 m^3} (1+m^2s^2) k_m \quad (14)$$

in which

$$k_m = \frac{A_m \text{sh } \alpha_m + B_m (\text{sh } \alpha_m + \alpha_m \text{ch } \alpha_m)}{\alpha_m - \text{th } \alpha_m (\alpha_m \text{th } \alpha_m - 1)} \quad (15)$$

and so the couples (10) will be

$$M_{yy} = qa^2 \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3} (1+m^2s^2) \sin \frac{m\pi x}{a} = \mu qa^2 \quad (16)$$

in which

$$\mu = \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3} (1+m^2s^2) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (17)$$

The additional displacement produced by the couple M_{yy} is according to (12), § 7, p. 56 [6] and (14) and (15)

$$Dw_1 = -qa^4 \frac{1}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^5 \text{ch } \alpha_m} \left[\frac{m\pi y}{a} \text{sh } \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \text{th } \alpha_m \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (18)$$

On the median line, $y = 0$,

$$Dw_{1(y=0)} = qa^4 \frac{1}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^5} \frac{\alpha_m \text{th } \alpha_m}{\text{ch } \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (18a)$$

2. CALCULATION OF THE ADDITIONAL BENDING COUPLES

According to (24)₁ § 2, p. 20–21 [6]

$$M_{xx} = - \left[Dw_{,xx} + \nu Dw_{,yy} + \frac{8+\nu}{40} \left(\frac{h}{a} \right)^2 a^2 D\Delta w_{,xx} \right] - \frac{\nu(4+\nu)}{40(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 a^2 p - Ch^4 p_{,xx} \quad (19)$$

or, taking into account (12) and (5),

$$M_{xx} = - \left[Dw_{,xx} + \nu Dw_{,yy} + \frac{s^2 a^2}{\pi^2} D\Delta w_{,xx} \right] - \frac{k^2 a^2}{\pi^2} p - Ch^4 p_{,xx} \quad (20)$$

in which $w = w_1$ from relation (18).

Making the calculations, we obtain:

$$Dw_{,y} = -qa^3 \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^4 \text{ch } \alpha_m} \left[(1 - \alpha_m \text{th } \alpha_m) \text{sh } \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (21)$$

$$Dw_{,yy} = -qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \text{ch } \alpha_m} \left[(2 - \alpha_m \text{th } \alpha_m) \text{ch } \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \text{sh } \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (22)$$

$$Dw_{,x} = -qa^3 \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^4 \text{ch } \alpha_m} \left(\frac{m\pi y}{a} \text{sh } \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \text{th } \alpha_m \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (23)$$

$$Dw_{,xx} = qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \text{ch } \alpha_m} \left(\frac{m\pi y}{a} \text{sh } \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \text{th } \alpha_m \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (24)$$

$$D\Delta w = Dw_{,xx} + Dw_{,yy} = -qa^2 \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \text{ch } \alpha_m} \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (25)$$

$$D\Delta w_{,x} = -qa \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \text{ch } \alpha_m} \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (26)$$

$$\text{and } D\Delta w_{,xx} = q \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m \text{ch } \alpha_m} \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (27)$$

we do not take into account the load of plate $p = 0$. (28)

Introducing (24), (22), (27) and (28) in (20), we obtain

$$M_{xx} = -qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[(1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \zeta(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2(m^2 s^2 - \nu) \right] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (29)$$

For: $y = 0$

$$M_{xx(y=0)} = qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2(m^2 s^2 - \nu)] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (30)$$

and for: $y = \frac{b}{2}$

$$M_{xx(y=\frac{b}{2})} = -qa^2 \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3} (m^2 s^2 - \nu) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (31)$$

According to [24], §2, p. 21 [6]

$$M_{yy} = - \left[Dw_{,yy} + \nu Dw_{,xx} + \frac{8+\nu}{40} \left(\frac{h}{a} \right)^2 a^2 D\Delta w_{,yy} \right] - \frac{\nu(4+\nu)}{40(1-\nu)} \left(\frac{h}{a} \right)^2 a^2 p - \operatorname{Ch}^4 p_{,yy} \quad (32)$$

or, taking into account (12) and (28)

$$M_{yy} = - \left[Dw_{,yy} + \nu Dw_{,xx} + \frac{s^2 a^2}{\pi^2} D\Delta w_{,yy} \right] \quad (33)$$

in which

$$D\Delta w_{,y} = -qa \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (34)$$

and

$$D\Delta w_{,yy} = -q \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (35)$$

Introducing (22), (24), (35) and (28) in (33), we obtain:

$$M_{yy} = -qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[\zeta(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2(1+m^2 s^2) \right] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (36)$$

For $y = 0$,

$$M_{yy(y=0)} = -qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2(1+m^2 s^2)] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (37)$$

and for $y = \frac{b}{2}$

$$M_{yy(y=\frac{b}{2})} = qa^2 \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3} (1+m^2 s^2) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (38)$$

That is precisely the expression (16) which verified the exactity of calculation

In the technical theory, $h/a \rightarrow 0$

$$l^2 = s^2 = 0, \quad (39)$$

and, taking into account (39) and (8), we obtain

$$B_m = b_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \quad \text{and} \quad A_m = -\frac{(-1)^{m+1}}{\operatorname{ch} \alpha_m} (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2) \quad (40)$$

and, introducing them in (15), it results

$$K_m = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \quad (41)$$

Introducing (41) in (30) and (37), we obtain the values (in the technical theory):

$$M_{xx(y=0)} = qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \times \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} [2\nu + (1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (42)$$

and

$$M_{yy(y=0)} = -qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \times \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} [(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (43)$$

which correspond to the half of values of the same quantities for the case of a uniformly distributed load $p = q$.

3. CALCULATION OF ADDITIONAL SHEAR FORCES

According to: (24)₄, § 2 [6].

$$Q_{zx} = -D\Delta w_{,x} - Bh^2 p_{,x} \quad (44)$$

in which, $\Delta w_{,x}$ was calculated in (26)

$$B = \frac{8-3\nu}{40(1-\nu)} \quad \text{and} \quad p_{,x} = q/a \quad (45)$$

But introducing (26) and (28) in (44), we obtain

$$Q_{zx} = qa \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (46)$$

Also, according to: (24)₅, § 2 [6]

$$Q_{zy} = -D\Delta w_{,y} - Bh^2 p_{,y} \quad (47)$$

in which $\Delta w_{,y}$ was calculated in (34), and $p_{,y} = 0$.

Introducing the last condition and (34) in (47), we obtain

$$Q_{zy} = qa \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (48)$$

The maximum values of shear forces Q_{zx} and Q_{zy} appear at the middle of the edges

$$Q_{zx(0,0)} = qa \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \quad (49)$$

and

$$Q_{zy\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)} = qa \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2} \operatorname{th} \alpha_m \sin m \frac{\pi}{2} \quad (50)$$

4. CALCULATION OF ADDITIONAL REACTIONS

The reactions along the $x = 0$ edge, has the expression of

$$V_x = Q_{zx} - M_{xy,y} \quad (x=0) \quad (51)$$

in which, according to (24)₃, § 2 [6]

$$M_{xy} = - \left[(1-\nu) D w_{,xy} + \frac{8+\nu}{40} \left(\frac{h}{a} \right)^2 a^2 D \Delta w_{,xy} \right] - Ch^4 p_{,xy} \quad (52)$$

in which

$$D w_{,xy} = -qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[(1-\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (53)$$

$$\frac{8+\nu}{40} \left(\frac{h}{a} \right)^2 = \frac{s^2}{\pi^2} \quad (\text{according to (12)}) \quad (54)$$

$$D \Delta w_{,xy} = -q \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (55)$$

and

$$p_{,xy} = 0. \quad (56)$$

Introducing (53)–(56) in (52) it results:

$$M_{xy} = qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[\zeta(1-\nu)(1-\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) + 2m^2 s^2 \right] \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \left] \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (57)$$

and

$$M_{xy(x=0)} = qa^2 \frac{1}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[\zeta(1-\nu)(1-\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) + 2m^2 s^2 \right] \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right]. \quad (58)$$

After deriving (58) with respect to y , and subtracting from (46) in which we make $x = 0$, we get the reaction (51)

$$V_{x(x=0)} = qa \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[\zeta(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2(m^2 s^2 - \nu) \right] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - (1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}. \quad (59)$$

In the technical theory, for $h/a \rightarrow 0$

$$V_{x(x=0)} = qa \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \times \left[\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right]. \quad (60)$$

At the middle of the edge, for $y=0$,

$$V_{x(0,0)} = qa \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cdot \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \cdot \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m. \quad (61)$$

The reaction on the $y = \frac{b}{2}$ side is calculated with the relation

$$V_y = Q_{zy} - M_{zy,z} \quad \left(y = \frac{b}{2} \right) \quad (62)$$

and is

$$V_{y(y=\frac{b}{2})} = qa \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2} [\zeta(1-\nu)(1-\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) + 2(1+m^2 s^2)] \operatorname{th} \alpha_m + (1-\nu) \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (63)$$

In the technical theory $h/a \rightarrow 0$

$$V_{y(y=\frac{b}{2})} = qa \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \cdot \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \times [(3 - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{th} \alpha_m + \alpha_m] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (64)$$

The concentrated reaction in the $(a, \frac{b}{2})$ corner of the plate is

$$R = 2M_{xy} \left(a, \frac{b}{2} \right) \quad (65)$$

or

$$R = qa^2 \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^3} k_m [\zeta(1-\nu)(1-\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) + 2m^2 s^2] \operatorname{th} \alpha_m + (1-\nu) \alpha_m]. \quad (66)$$

In the technical theory, for $h/a \rightarrow 0$

$$R_{(a, \frac{b}{2})} = qa^2 \frac{2(1-\nu)}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1}}{m^3} [\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)]. \quad (67)$$

5. CALCULATION OF ADDITIONAL STRESSES

According to (23)₁ §2 [6]

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left[z(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) + \left(\frac{h^2}{4} - \frac{2-\nu}{6} z^2 \right) z \Delta w_{,xx} \right] - \\ & - \left[\frac{5-2\nu}{8(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \frac{3-\nu}{10} \left(\frac{z}{h} \right)^5 \right] h^2 p_{,xx} - \\ & - \nu \left[\frac{3}{2(1-\nu)} \cdot \frac{z}{h} - 2 \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right] p \end{aligned} \quad (68)$$

in which

$$\frac{E}{1-\nu^2} = -\frac{12D}{h^3} \quad (69)$$

and $p = p_{,xx} = 0$, according to (28).

On the $Z = \frac{h}{2}$ surface, the maximum stress has the value

$$\sigma_{xx \max(z=\frac{h}{2})} = -\frac{6}{h^2} \left[Dw_{,xx} + \nu Dw_{,yy} + \frac{h^2}{24} (4+\nu) D \Delta w_{,xx} \right] \quad (70)$$

in which, introducing (24), (22) and (27), we get

$$\begin{aligned} \sigma_{xx \max(z=\frac{h}{2})} = & -qa^2 \frac{1}{\pi^3 W} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[(1-\nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \right. \\ & \left. - \left((1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2\nu - \frac{4+\nu}{12} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}; \\ & W = \frac{h^2}{6}. \end{aligned} \quad (71)$$

On the median line: $y=0$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx \max(z=\frac{h}{2}; y=0)} = & qa^2 \frac{1}{\pi^3 W} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[(1-\nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2\nu - \right. \\ & \left. - \frac{4+\nu}{12} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \quad (72)$$

According to (23)₂, §2 [6] and (28)

$$\sigma_{yy} = -\frac{12D}{h^3} \left[z(w_{,yy} + \nu w_{,xx}) + \left(\frac{h^2}{4} - \frac{2-\nu}{6} z^2 \right) z \Delta w_{,yy} \right] \quad (73)$$

and

$$\sigma_{yy \max}(z = \frac{h}{2}) = -\frac{1}{W} \left[Dw,_{yy} + \nu Dw,_{xx} + \frac{h^2}{24} (4 + \nu) D\Delta w,_{yy} \right]; W = \frac{h^2}{6}; \quad (74)$$

and introducing (22), (24) and (35), it results:

$$\sigma_{yy \max}(z = \frac{h}{2}) = -qa^2 \frac{1}{\pi^3 W} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[\left((1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2 - \frac{4 + \nu}{12} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (75)$$

and, on the median line $y = 0$, it results

$$\sigma_{yy \max}(z = \frac{h}{2}; y=0) = -qa^2 \frac{1}{\pi^3 W} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[(1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 2 - \frac{4 + \nu}{12} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (76)$$

According to (23)₃, § 2 [6] and to the condition $Z = \frac{h}{2}$ it results:

$$\sigma_{xy \max}(z = \frac{h}{2}) = -\frac{1}{W} \left[(1 - \nu) Dw,_{xy} + \frac{h^2}{24} (4 + \nu) D\Delta w,_{xy} \right] \quad (77)$$

in which, introducing (53) and (55), we obtain:

$$\sigma_{xy \max}(z = \frac{h}{2}) = qa^2 \frac{1}{\pi^3 W} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left[\left((1 - \nu) (1 - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) + \frac{4 + \nu}{12} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (78)$$

According to (23)₄, § 2 [6] and to condition (28)

$$\sigma_{zz} = 0. \quad (79)$$

According to (23)₅, § 2 [6] to the condition $Z = 0$ and (28)

$$\sigma_{zz \max}(z=0) = -\frac{3}{2h} D\Delta w,_{xx}. \quad (80)$$

Introducing (26), it results:

$$\sigma_{zz \max}(z=0) = qa \frac{3}{\pi^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (81)$$

For: $x = a$

$$\sigma_{zz \max}(z=0, x=a) = qa \frac{3}{\pi^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} k_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}. \quad (82)$$

For $y = 0$, on the median line

$$\sigma_{zz \max}(z=0, y=0) = qa \frac{3}{\pi^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (83)$$

and, for $y = \frac{b}{2}$, on the rigidly clamped edge,

$$\sigma_{zz \max}(z=0, y=\frac{b}{2}) = qa \frac{3}{\pi^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (84)$$

Also, we calculate $P_{zy \max}$, according to (23)₆ § 2 [6] and to condition $z = 0$

$$\sigma_{zy \max}(z=0) = qa \frac{3}{\pi^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (85)$$

and, on the rigidly clamped edge, for $y = \frac{b}{2}$,

$$\sigma_{zy \max}(z=0, y=\frac{b}{2}) = qa \frac{3}{\pi^2 h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m^2} \operatorname{th} \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (86)$$

6. DETERMINATION OF M_{yy} COUPLES FIELD

With the object of determination of couples field (16) it was calculated the values (17), for $\nu = 0.3$, for ratios

$$h/a = 1/20; 1/10; 1/5$$

$$b/a = 1; 1.25; 1.50; 1.75 \text{ and } 2$$

$$x/a = 1/2 \text{ and } 3/4,$$

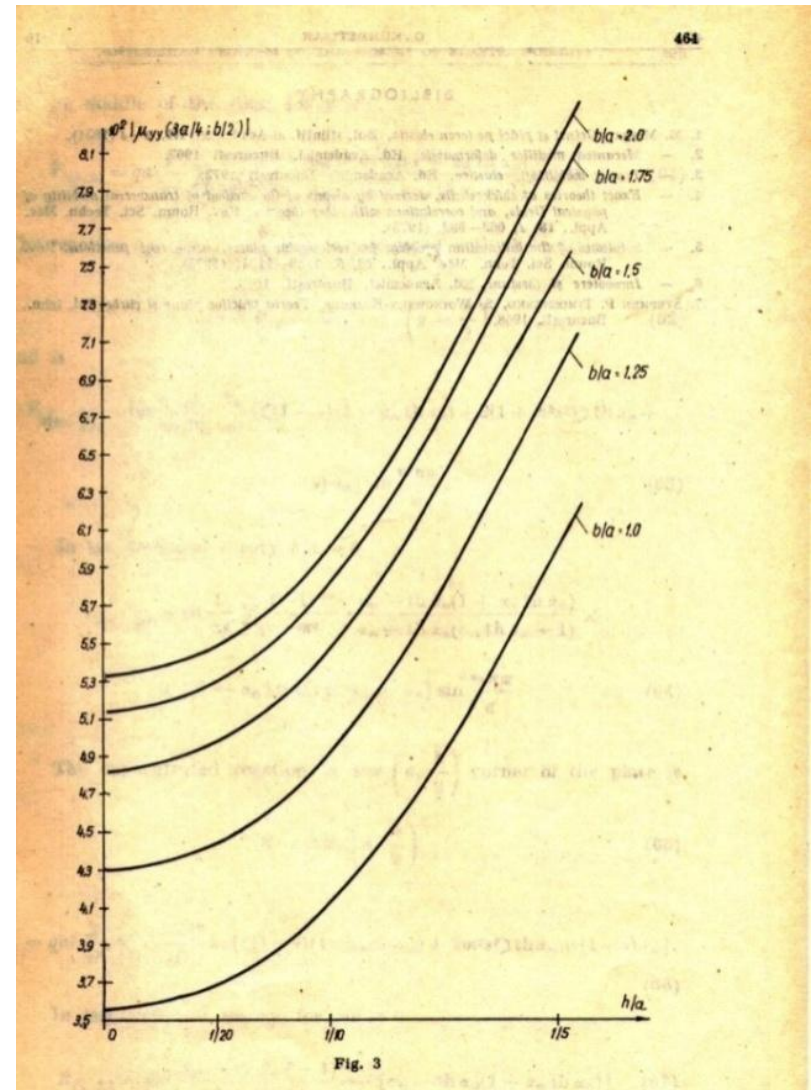
and for the first three terms ($m = 1, 2, 3$) of the series obtaining the following results:

valorile coeficienților adimensionali μ_{yy} ai momentelor încovoietoare M_{yy} , pe laturile încastrate ale plăcii (la $y=\pm b/2$), în punctele de la $x=a/2$ și $3a/4$, pentru grosimi relative $h/a=0; 1/20; 1/10$ și $1/5$, cu rapoarte ale laturilor b/a de $1,00; 1,25; 1,50; 1,75$ și $2,00$, și pentru $\nu=0,3$, au fost printate în tabelul următor :

339. VALORILE COEFICIENTILOR $\mu_{yy}(y=b/2)$
 =PLACA DREPTUNGHIALARA 2 LATURI OPUSE RE EMATE =2 INCASTRATE=
 $\nu=0,3$

x/a		1/2				3/4								
		0	1/20	1/10	1/5	0	1/20	1/10	1/5					
h/a	0													
	1/20													
b/a	1,00													
	1,25													
1,50	1,75													
	2,00													
1,00		-0,034533	-0,034973	-0,036233	-0,040576	-0,035480	-0,036891	-0,041233	-0,060250					
1,25		-0,044821	-0,045378	-0,046993	-0,052008	-0,043036	-0,044543	-0,049178	-0,069435					
1,50		-0,052044	-0,052683	-0,054547	-0,061203	-0,048217	-0,049786	-0,054609	-0,075652					
1,75		-0,056555	-0,057245	-0,059266	-0,066571	-0,051426	-0,053032	-0,057967	-0,079483					
2,00		-0,059156	-0,059877	-0,061987	-0,069668	-0,053270	-0,054897	-0,059897	-0,081681					

Graficul alăturat prezintă variațiile coeficienților adimensionali (μ_{yy}) ai momentelor încovoietoare M_{yy} , în punctele de la $(3a/4; \pm b/2)$ ale laturilor încastrate, în funcție de grosimea relativă h/a (pe abscisă), și de rapoartele b/a ale laturilor plăcii. Se observă că, pentru grosimi relative care exced câtorva mii procente (sub 2-3%), creșterea valorilor coeficienților adimensionali ai momentelor încovoietoare este aproape exponențială.



În cazul plăcilor (de acest tip), cu o grosime relativă (h/a) de $1/20$ și cu raportul laturilor $(b/a)=1$, eroarea în punctele $(a/2;\pm b/2)$ și $(3a/4;\pm b/2)$ (dacă pentru calculul plăcii s-ar aplica “teoria tehnică”), ar fi de $(1,274-3,927)\%$, inacceptabilă pentru un calcul “exact” al plăcii. În acest caz, pentru calculul corect și exact al plăcii, ar trebui aplicată evident, metoda de calcul bazată pe ipoteza de placă groasă.

Am abordat apoi problema plăcilor cu dublă curbură anticlastice convex-concave, în formă de șa, cu curbură Gauss $K=K_1K_2<0$,

- 1).cu trei laturi rezemate și una liberă, și a celor**
- 2).cu o latură încastrată, două rezemate și una liberă.**

by G. KÜMBETLIAN* and D. PASCALE**

This paper presents a program for the analysis of thick anticlastic plates under hydrostatic load, as it was worked out and run on the computer, in order to obtain the dimensionless coefficients of the bending moments.

In the case of the thick anticlastic plates [8] under hydrostatic load, the relative thickness of which is greater than 1/20, the stress distribution on the thickness cannot be considered linear. In this case Love-Kirchhoff's hypothesis loses its validity, and the analysis must be approached in other ways. Reducing the space theory of elasticity to a bi-dimensional form, on the basis of a displacement field changing with odd powers — respectively even — of the distance (z) in relation to the median plane, it was established a general model [6] for the calculation of such plates, with solutions in displacements, stresses, moments and shear forces, which can be used directly in solving particular problems [3, 4, 7].

According to the mentioned model (and with the usual notations of the elastic theory), the stress fields were established in relation to the displacement (w) in the median plane and the load (p), the elastic constants (E, ν) of the material and the thickness (h) of the plate. From these, and by means of the equivalence equations of the section, the functions of the bending and torsional moments, of the transverse shear forces were established, on the plate thickness and per unit length of the section of the general model.

So, the M_{xx} bending moment can be expressed by

$$M_{xx} = -D \left(w_{,xx} + \nu w_{,yy} + \frac{8 + \nu}{40} h^2 \Delta w_{,xx} \right) - \frac{\nu(4 + \nu)}{40(1 - \nu)} h^2 p - \frac{583 - 208\nu + 3\nu^2}{13\,440(1 - \nu)} h^4 p_{,xx} - \frac{\nu(311 - 104\nu + 3\nu^2)}{13\,440(1 - \nu)} h^4 \Delta p - \frac{11\,570 - 14\,769\nu + 9\,120\nu^2 - 2\,519\nu^3}{967\,680(1 - \nu)^2} h^6 \Delta p_{,xx} \quad (1)$$

* Marine Institute, Constanța.

** I.E.P. NAVROM, Constanța.

and for the M_{yy} bending moment, and M_{xy} torsional moment, suitable similar forms were found [6]. For the calculation of the Q_{zx} transverse shear forces, relations were established, such as

$$Q_{zx} = -D \Delta w_{,x} - \frac{8 - 3\nu}{40(1 - \nu)} h_{p,x}^2 - \frac{1516 - 2010\nu + 1264\nu^2 - 350\nu^3}{26880(1 - \nu)^2} \times h^4 \Delta p_{,x} \quad (2)$$

and for the calculation of the Q_{zy} transverse shear forces, similar forms [6]. D is the bending rigidity of the plate.

To show the model in which the problems of bending of the thick anticlastic plates can be solved on the basis of the theoretical model mentioned above, we consider a plate with a complex state of mobility of the outline, having rigidly clamped, supported and free edges, as in Fig. 1. The load is hydrostatic, with q its maximum value. In a section x , the load will be

$$p = q \cdot 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \times \sin(m\pi x/a) / \pi m \quad (3)$$

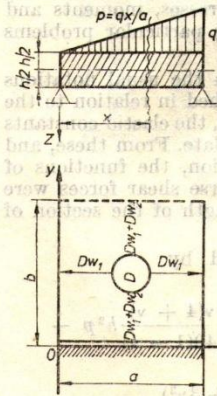


Fig. 1

The displacement function takes the form

$$D_w = D w_1 + D w_2, \quad (4)$$

where $D w_1$ is a particular solution of the plate equation

$$D \Delta^2 w_1 = p \quad (5)$$

and $D w_2$ satisfies the homogeneous equation

$$D \Delta^2 w_2 = 0. \quad (6)$$

The component $D w_1$ is considered to be the displacement of a strip parallel to the abscissa.

$$D w_1 = q(3x^5/a + ux^3 + tx^2 + sx)/360, \quad (7)$$

where the constants u , t and s are determined by means of the conditions from the edges $x = 0, a$ of the plate

$$D w_{1(0,a)} = 0; \quad M_{xx[D w_1(0,a)]} = 0. \quad (8)$$

The first member of the last two conditions is obtained by introducing the displacement (7) and the load in relation (1). After the deter-

mination of the constants and the development of the expression, it results that

$$Dw_1 = qa^4 \cdot 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} (1 + m^2 l^2) \sin(m\pi x/a) / (\pi m)^5, \quad (9)$$

in which

$$l^2 = (8 + 3\nu) (\pi h/a)^2 / 40(1 - \nu). \quad (10)$$

The Dw_2 component may be considered as

$$Dw_2 = \sum_{m=1}^{\infty} DY_m \sin(m\pi x/a), \quad (11)$$

where DY_m is a pure function of y .

Introducing it in equation (6), we obtain a differential biquadratic equation in DY_m , the general integral of which takes the form

$$DY_m = qa^4 [A_m \operatorname{ch}(m\pi y/a) + B_m (m\pi y/a) \operatorname{sh}(m\pi y/a) + C_m \operatorname{sh}(m\pi y/a) + D_m (m\pi y/a) \operatorname{ch}(m\pi y/a)]. \quad (12)$$

With this, the total displacement from (4) can be written in relation to the Dw_1 component from (9), and Dw_2 from (11) and (12), as

$$Dw = qa^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x/a) \{2(-1)^{m+1} (1 + m^2 l^2) + A_m \operatorname{ch}(m\pi y/a) + B_m (m\pi y/a) \operatorname{sh}(m\pi y/a) + C_m \operatorname{sh}(m\pi y/a) + D_m (m\pi y/a) \operatorname{ch}(m\pi y/a)\} / (\pi m)^5 \quad (13)$$

The determination of the constants of integration A_m , B_m , C_m and D_m is made by means of the conditions from the edges of the plate, for each case.

So, for the plate with three simply supported edges and the fourth one free, the conditions will be

$$Dw_{(y=0)} = 0; \quad M_{yy(y=0,b)} = 0; \quad Y_{y(y=b)} = 0, \quad (14)$$

and for the plate with two simply supported edges, the third rigidly clamped and the fourth free, the conditions will be

$$Dw_{(y=0)} = 0; \quad Dw_{,y(y=0)} = 0; \quad M_{yy(y=b)} = 0 \text{ and } V_{y(y=b)} = 0, \quad (15)$$

where M_{yy} is calculated with a relation [6] similar to that from (1), and V_y is the reaction on the edge $y = b$

$$V_y = Q_{zy} - M_{xy,x}. \quad (16)$$

In (16), Q_{zy} is the transverse shear force in a section parallel to the zOx plane, and is calculated with a relation similar [6] to that of (2). In the reaction expression we introduce the gradient of the torsional moment, which is calculated with a suitable relation of the general model [6].

Applying the boundary conditions (14) and (15), for the plate with three supported edges and the fourth free, we get

$$A_m = -2(-1)^{m+1} \cdot a_m; \quad a_m = 1 + m^2 l^2 \quad (17)$$

$$B_m = (-1)^{m+1} \cdot c_m; \quad c_m = [1 + m^2 s^2 \cdot a_m] / (1 + m^2 s^2) \quad (18)$$

$$C_m = (-1)^{m+1} \{2a_m (1 - \nu) [(1 - \nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + 2(1 + m^2 s^2)] + c_m [(1 - \nu)^2 \cdot \beta_m^2 - 2(1 + m^2 s^2)(3 - \nu + 2m^2 s^2)] + 2\delta_m [(3 - \nu + 2m^2 s^2) \operatorname{ch} \beta_m + (1 - \nu) \beta_m \operatorname{sh} \beta_m]\} /$$

$$\{(1 - \nu)^2 (\operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m - \beta_m)\} \quad (19)$$

in which

$$s^2 = (8 + \nu) (\pi h/a)^2 / 40, \text{ and } \beta_m = m\pi b/a \quad (20)$$

$$D_m = (-1)^{m+1} \cdot d_m / \{(1 - \nu) (\operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m - \beta_m)\} \quad (21)$$

in which

$$d_m = 2(1 - \operatorname{ch} \beta_m) \cdot \delta_m - (1 - \nu) c_m \operatorname{sh}^2 \beta_m \quad (22)$$

and

$$\delta_m = (\nu + m^2 s^2) a_m - m^2 l^2 \quad (23)$$

and, for the plate with two supported edges, one rigidly clamped and the other free

$$A_m = -2(-1)^{m+1} \cdot a_m \quad (24)$$

$$B_{m_1} = 2(-1)^{m+1} \{a_m (1 - \nu) [2(1 + m^2 s^2) + (1 - \nu) \operatorname{sh}^2 \beta_m] +$$

$$+ \delta_m [2(1 + m^2 s^2) \operatorname{ch} \beta_m + (1 - \nu) \beta_m \operatorname{sh} \beta_m]\} /$$

$$/[4(1 + m^2 s^2)^2 + (1 - \nu)^2 (\operatorname{sh}^2 \beta_m - \beta_m^2)] \quad (25)$$

$$C_{m_1} = -D_{m_1} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 D_{m_1} = & -2(-1)^{m+1} \{ \delta_m [2(1 + m^2 s^2) \operatorname{ch} \beta_m + \\
 & + (1 - \nu) (\operatorname{sh} \beta_m + \beta_m \operatorname{ch} \beta_m)] + \alpha_m (1 - \nu)^2 \times \\
 & \times (\operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m + \beta_m) / [4(1 + m^2 s^2)^2 + \\
 & + (1 - \nu)^2 (\operatorname{sh}^2 \beta_m - \beta_m^2)] \}. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Introducing the displacement (13) and the load (3) into the relations for the calculation of the bending moments which are suitable for the theoretical model, the fields of the moments and their functions in the points of the edge $y = 0$ and at $y = b/2$ were established under the form

$$M_{xx(y)} = qa^2 \cdot \mu_{xx(y)}; \quad y = 0; \quad b/2 \quad (28)$$

in which

$$\mu_{xx(y=0)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x/a) \{ 2(-1)^{m+1} + A_m (1 - \nu) - 2B_m(\nu - m^2 s^2) \} / (\pi m)^3 \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{xx} \left(y = \frac{b}{2} \right) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sin(m\pi x/a) \{ 2(-1)^{m+1} + A_m (1 - \nu) \operatorname{ch} \alpha_m + \\
 & + B_m [(1 - \nu) \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m - 2(\nu - m^2 s^2) \operatorname{ch} \alpha_m + C_m (1 - \nu) \operatorname{sh} \alpha_m + \\
 & + D_m [(1 - \nu) \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - 2(\nu - m^2 s^2) \operatorname{sh} \alpha_m] \} / (\pi m)^3. \quad (30)
 \end{aligned}$$

in which

$$\alpha_m = m\pi b/2a, \quad (31)$$

and analogously, for the moments μ_{yy} ($y = 0; b/2$). The relations are valid for both types of plates, taking into account the expressions of the A_m , B_m , C_m and D_m constants for each case.

For the calculation of the dimensionless coefficients values (μ) of the bending moments, a computer program has been elaborated in FORT-RAN and run on the FELIX C-256 computer. The logical diagram shown below, which is at the basis of the elaboration of this program, has a general character that allows its quick adaptation for the calculation of the values of any physical magnitudes of the studied plates.

The calculation was performed for the plates of relative thickness $h/a = 0$ (corresponding to the classical theory); 1/20; 1/10 and 1/5, the ratio of the edges $b/a = 1$ (for a square plate); 1.25; 1.50; 1.75 and 2, in the sections from $x/a = 1/2$ and 3/4, for $\nu = 0.3$ and for the first three terms of the series corresponding to $m = 1, 2, 3$, as the series are quickly convergent.

The diagram for the calculation program of the μ values

Statements as	REAL NIU, L2(4); K2(4) MAV(8,5,4,2)
Dimensions	DIMENSION S2(4); S(8); HA(4)
Initiations	DATA HA/0., 0.05, 0.1, 0.2/

START

NIU = 0.3
PI = 3.14159
XA = 0.5

I = 1 for h/a

① the cycle D Φ 1: 1.4

L2(J) =
S2(I) =
K2(I) =

I = I + 1

① Yes I < 4

No K = 1 for x/a

⑦ the cycle D Φ 7; K = 1.2

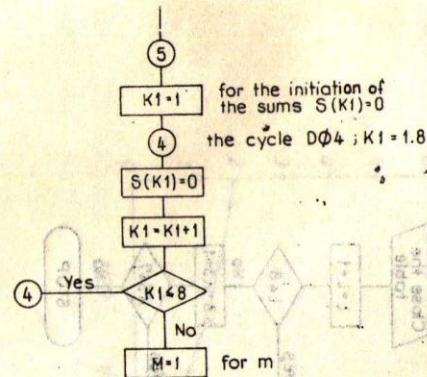
J = 1 for h/a

⑥ the cycle D Φ 6; J = 1.4

BA = 1

I = 1 for b/a

⑤ the cycle D Φ 5; I = 1.5



② the cycle D Φ 2 M = 1.3

AM =	AAM =
BTM =	BBM =
AM1 =	CCM =
CM =	DDM =
DM =	BBM1 =
DTM =	CCM1 =
	DDM1 =

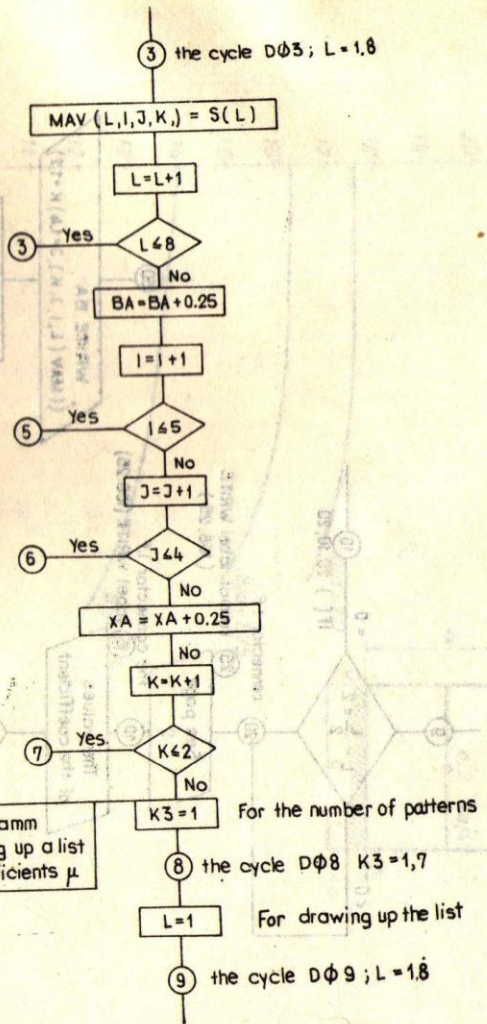
S(1) =	S(5) =
S(2) =	S(6) =
S(3) =	S(7) =
S(4) =	S(8) =

M = M + 1

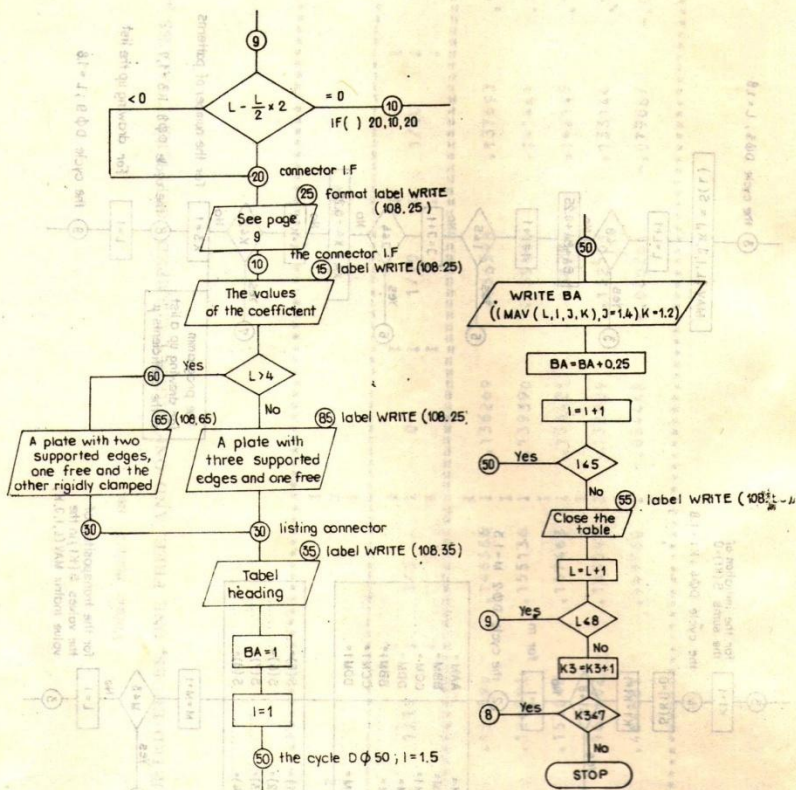
② Yes M < 3

No L = 1

for the transposition of the values S(K1) in the value matrix MAV(L, I, J, K)



The program for drawing up a list of the coefficients μ



For the establishment of the program the following notations were made:

$$HA = h/a; \quad XA = x/a; \quad BA = b/a$$

$$L2(I) = l^2; \quad S2 = s^2$$

$$AM = \alpha_m; \quad BTM = \beta_m$$

$$AM1 = \alpha_m; \quad CM = c_m; \quad DM = d_m; \quad DTM = \delta_m$$

$$AAM = A_m; \quad BBM = B_m; \quad CCM = C_m; \quad DDM = D_m; \quad BBM1 = B_{m1};$$

$$CCM1 = C_{m1}; \quad DDM1 = D_{m1}$$

$$S(1) = \mu_{xx}(y=b) \text{ corresponding to } A_m, B_m, C_m, D_m$$

$$S(2) = \mu_{xx}(y=b/2) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$S(3) = \mu_{yy}(y=0) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$S(4) = \mu_{yy}(y=b/2) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$S(5) = \mu_{xx}(y=b) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad A_m; B_{m1}; C_{m1}; D_{m1}$$

$$S(6) = \mu_{xx}(y=b/2) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$S(7) = \mu_{yy}(y=0) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$S(8) = \mu_{yy}(y=b/2) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

The values of the bending moment factors in relation to the mentioned parameters were put in the value matrix no. 1 like that annexed, and correspond to the moment M_{xx} on the rigidly clamped edge of the plate with two simply supported edges, one free and the other rigidly clamped.

On the basis of the results obtained, the set of curves corresponding to the variation of the moment field with the mentioned parameters was represented in diagrams like those shown in Figs. 2 and 3.

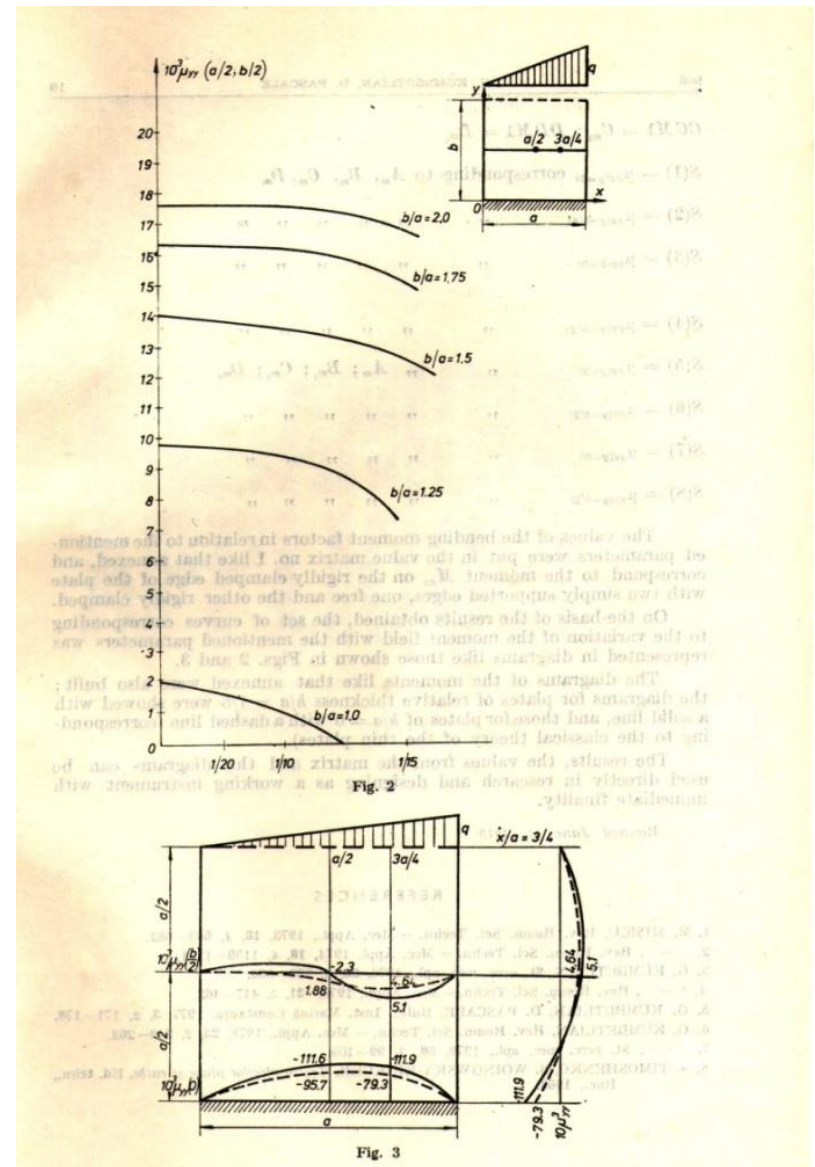
The diagrams of the moments like that annexed were also built; the diagrams for plates of relative thickness $h/a = 1/5$ were showed with a solid line, and those for plates of $h/a = 0$ with a dashed line (corresponding to the classical theory of the thin plates).

The results, the values from the matrix and the diagrams can be used directly in research and designing as a working instrument with immediate finality.

În figura alăturată au fost reprezentate atât variațiile coeficienților adimensionali

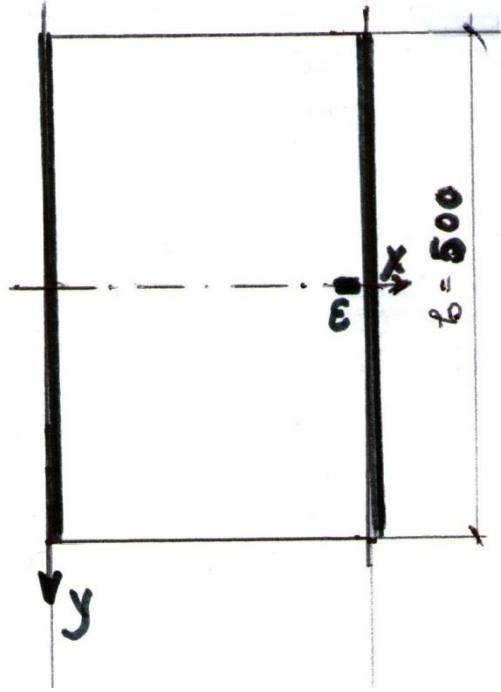
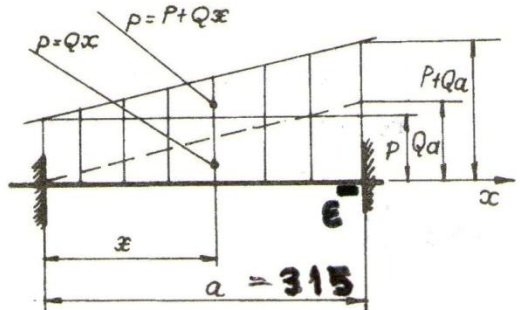
$\mu_{yy} (a/2; b/2)$ ai momentelor M_{yy} , în funcție de grosimea relativă (h/a) a plăcii (pe abscisă) și de rapoartele dintre laturile ei, precum și diagramele de variație a momentelor încovoietoare

M_{yy} , pentru placa cu două margini opuse rezemate (la $x=0; a$), una încastrată (la $y=0$) și una liberă (la $y=b$), sub sarcină hidrostatică $q=f(x)$.



În cazul încovoierii generale a plăcilor cu dublă curbură (sin-și anticlastice) diferențele dintre momentele încovoietoare din teoria **“tehnică”** a plăcilor (considerate subțiri) și cea **“exactă”** (a plăcilor groase) ajung, pentru **$h/a=1/5$ și $\nu=0,3$** , până la valori de cca. **41%**.

Revenind la încovoierea cilindrică, în tabelul care urmează sunt redate valorile tensiunilor teoretice în punctul de la jumătatea unei laturi încastrate, în **cazul plăcii cu laturile opuse încastrate, cu $h=45\text{mm}$ ($h/a=1/7$) sub sarcină uniform-distribuită.**



$h=45$ mm ($h/a = 1/7$) sub sarcină uniform-distribuită.

Sarcina totală Pt daN	Sarc.distribuită $P=Pt/ab$ daN/cm ² $P=0,634 \times 10^{-3} Pt$	Tens.max. daN/cm ² , în teor.		
		tehnică	exactă	Eroarea teor. tehn.
		24,5 P	26,189 P	
46,9	$29,7346 \times 10^{-3}$	0,72849	0,77872	6,45
56,7	$35,9478 \times 10^{-3}$	0,88072	0,94144	"
66,5	$42,161 \times 10^{-3}$	1,03294	1,10415	"
76,3	$48,3742 \times 10^{-3}$	1,18517	1,26687	"

Din tabel se observă că tensiunile calculate analitic, pentru diferite sarcini, cresc dinspre cele calculate pentru placa considerată subțire înspre cele corespunzătoare plăcii groase. În mod asemănător am calculat tensiunile și în alte plăci, cu laturi opuse încastrate sau rezemat-încastrate, cu $h=90$ mm, $a=315$ mm și $(h/a)=1/3,5$

În anii 1992-1993, în aceleași puncte de calcul, tensiunile determinate analitic au fost verificate și numeric [18;19], pentru plăci din polistiren expandat cu $E=518,5 \text{ daN/cm}^2$ și $\nu=0,2778$. Programul, scris în **Turbo-Pascal 6**, era capabil să opereze pe structuri cu un număr maxim de **104 elemente (cuadratică cu 8 noduri)** și **355 de noduri**. Instalarea lui a necesitat **207 KB**. Programul a fost implementat pe un calculator **AT-80386** la **25 de MHz**, dotat cu un **coprocessor Math 80387**. Structura discretizată a plăcii rezemat-încastate sau dublu-încastate avea **96 de elemente și 329 de noduri**, ca în reprezentarea următoare.

8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
7	15	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95
6	14	22	30	38	46	54	62	70	78	86	94
5	13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92
3	11	19	27	35	43	51	59	67	75	83	91
2	10	18	26	34	42	50	58	66	74	82	90
1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89

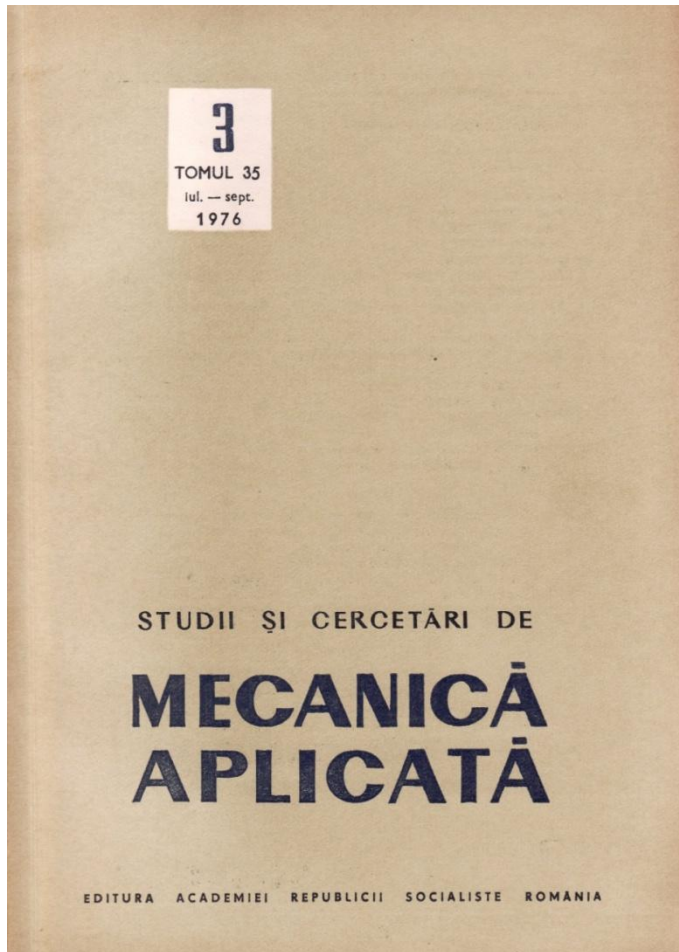
321

Tensiunile au fost calculate în **nodul 321**, la mijlocul laturii încastrate, acolo unde au fost determinate în prealabil și analitic. Programul a necesitat un timp de lucru de cca. 10 minute. Au rezultat datele trecute în tabelul următor, care cuprinde valorile tensiunilor din “Teoria tehnică” de placă subțire, cele obținute cu ajutorul MEF și cele din ipoteza de placă groasă.

Placa Încastat-	P, TOTAL daN	σ ,Pl.Subț. daN/cm ²	σ ,MEF. daN/cm ²	σ ,Pl. Gr. daN/cm ²
Rezemată	37,3	0,869	0,886	0,926
Rezemată	46,9	1,092	1,114	1,165
Rezemată	56,7	1,321	1,346	1,408
Încastrată	56,7	0,880	0,926	0,941
Încastrată	66,5	1,032	1,086	1,104
Încastrată	76,3	1,185	1,246	1,266

După cum se constată din tabelul de mai sus, **tensiunile** obținute cu ajutorul **MEF**, au **valori inferioare** celor calculate analitic pe baza teoriei “exacte” (de placă groasă) și comparativ cu ele **prezintă abateri cuprinse între 1,6% și 4,5%.**

Rezultatele cercetărilor descrise mai sus au fost publicate în revistele de profil ale Academiei Române (v. bibliografia).



Lucrarea “A general model for the calculation of thick plates (and rods)” [10], a fost citată în «The Shock And Vibration Digest» [13], Volume 10, No.12, December 1978 (a publication of the Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington D.C., office of the under Secretary of Defense for Research and Engineering), page 78, no. 78-1820.

Madras 600 036, India, J. Acoust. Soc. Amer., 63 (6), pp 1832-1840 (June 1978) 12 figs, 7 refs

Key Words: Circular plates, Composite structures, Vibration response

Vibrational characteristics of circular double-plate systems connected together by concentric, intermediate, elastic ring supports have been considered in this work. The analysis is based on the assumption that both of the plates are thin, elastic, and isotropic. Also, the plates are subjected to initial in-plane loads. The solutions are shown to be in terms of Bessel functions for the case of complete and annular (with equal in-plane loads) circular isotropic plate systems. The vibrational characteristics of the systems are illustrated by presenting numerical results for isotropic plate systems with one intermediate connection. When both the plates are identical with identical edge forces and boundary conditions, in-phase and out-of-phase vibration modes are observed.

78-1818

Acoustic Reflection from a Thick Plate with One Reinforcing Rib. Exact Integral Evaluation is Proved Superior to Integral Approximation in Analysis of Acoustic Reflections from a Timoshenko-Mindlin Plate Reinforced with One Rib

B.L. Woolley
Naval Ocean Systems Center, San Diego, CA, Rept. No. NOSC/TR-176, 198 pp (Dec 1977)
AD-A054 610/1GA

Key Words: Plates, Acoustic reflection, Timoshenko theory, Mindlin theory, Computer programs

The reflection of a plane sound wave from a thick, i.e., Timoshenko-Mindlin, fluid-loaded elastic plate reinforced with a stiffness member is investigated. The case is first solved without using integral approximation techniques. This solution gives relatively lower returns than those given by integral approximation techniques. The solution is also found by an integral approximation technique and then by an integral approximation technique taking into account leaky wave poles. The results of numerical calculations are presented and reviewed. Computer programs are given to carry out the calculations.

78-1819

Theoretical Analysis of the Free and Forced

Plates

Key Words: Probability theory, Plates

A new mathematical method of calculation of the probabilistic characteristics of mechanical systems with complex geometry is presented. This method has been demonstrated on the example of random vibrating plates. This method is based on the application of certain special functions called R functions. In order to demonstrate this method, numerical calculations are presented of probabilistic characteristics for plates with complex geometry which have been clamped on the edge.

78-1820

A General Model for the Calculation of Thick Plates (And Rods)

G. Kumbetlian

Marine Institute, Constanta, Rumania, Rev. Roumaine Sci. Tech. - Mec. Appl., 23 (2), pp 249-262 (Mar/Apr 1978) 4 refs

Key Words: Plates, Rods, Harmonic excitation

This paper presents a general theoretical model for the calculation of thick plates (and rods) under biharmonic loads, which satisfies the large majority of loads occurring in practice.

78-1821

Design of Clamped Composite-Material Plates to Maximize Fundamental Frequency

C.W. Bert
School of Aerospace, Mech. and Nuclear Engrg., Univ. of Oklahoma, Norman, OK, J. Mech. Des., Trans. ASME, 100 (2), pp 274-278 (Apr 1978)
1 fig, 6 tables, 23 refs

Key Words: Rectangular plates, Composite materials, Fundamental frequency, Optimum design, Optimization

Methodology and equations are developed for maximizing the fundamental frequency (ω_1) of small-amplitude, free flexural vibration of a clamped, rectangular plate consisting of multiple, equal-thickness layers of the same unidirectional filamentary composite material. The synthesis is based on a concise, explicit equation for ω_1 in terms of plate dimensions, density, and the anisotropic flexural and torsional rigidities. The equation is developed in the paper and shown to be suitable for use in

78-1820

**A General Model for the Calculation of Thick Plates
(And Rods)**

G. Kumbetlian

Marine Institute, Constanta, Rumania, Rev. Rou-
maine Sci. Tech. - Mec. Appl., 23 (2), pp 249-262
(Mar/Apr 1978) 4 refs

Key Words: Plates, Rods, Harmonic excitation

This paper presents a general theoretical model for the calculation of thick plates (and rods) under biharmonic loads, which satisfies the large majority of loads occurring in practice.

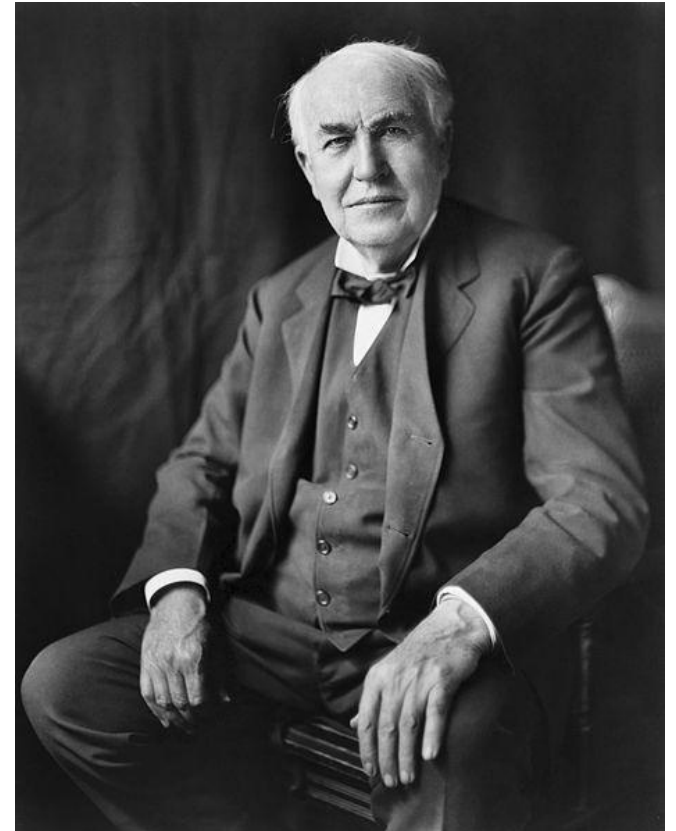
Iată și o scurtă prezentare a acestor instituții. La data de 19 decembrie 1945, **președintele Harry Truman** (1884-1972) a propus înființarea unui departament unit al apărării (**Department of Defense-DoD**), condus de Secretarul Apărării. La 26 iulie 1947 a semnat **“National Security Act of 1947”**, care consfințea nașterea noului departament.



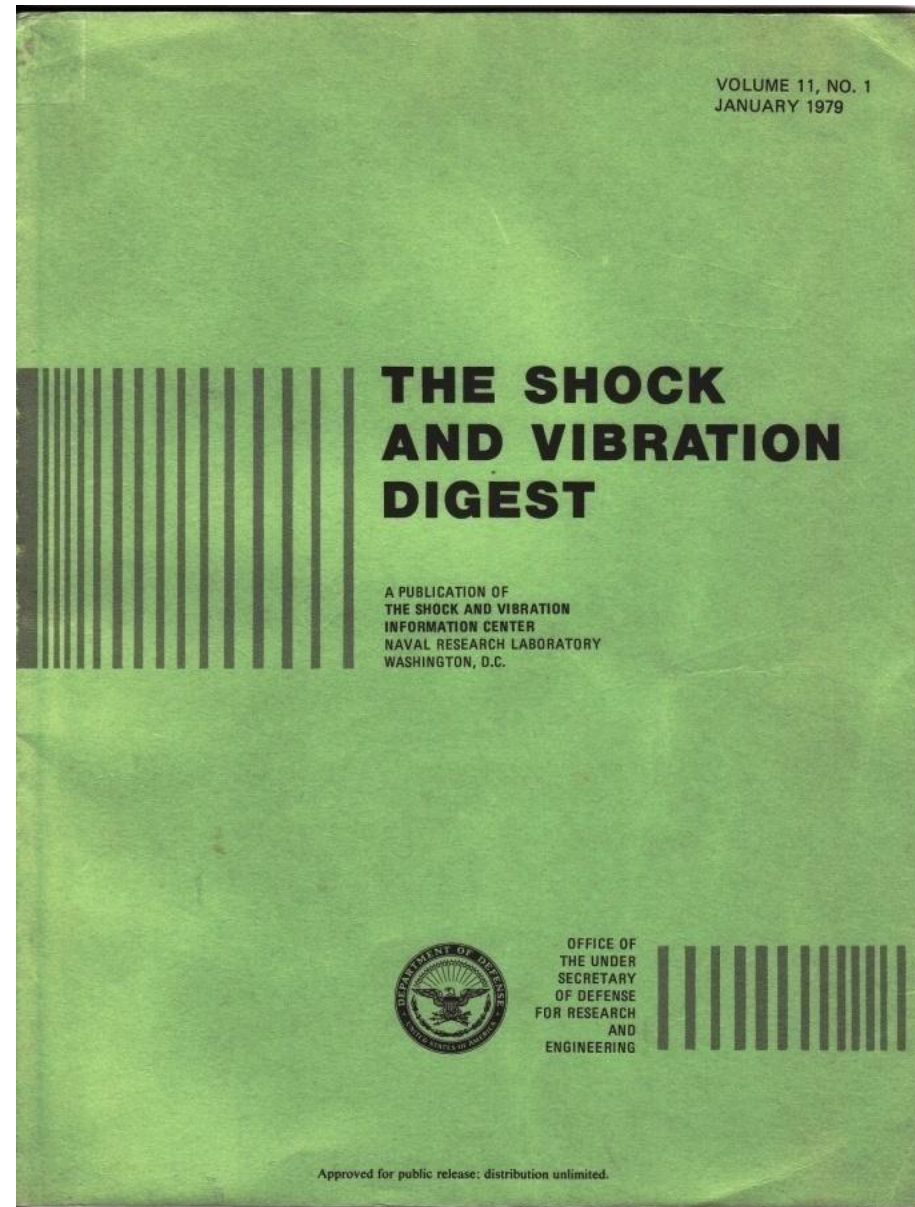


Departamentul Apărării (DoD) are în subordine agenții ca cea de **Cercetare în Domeniul Apărării**, iar **“Office of the Secretary of Defense” (OSD)** [2] este un organism civil care supervizează **“Defense Technical Information Center” [DTIC]** [5].

Unul dintre centrele experimentale de bază ale **DoD** este **“Naval Research Laboratory” (NRL)**, [6] numit uneori și **“părintele invențiilor moderne”**. Apariția lui i se datorează celebrului **Thomas Alva Edison (1847-1931)**, care a pus bazele acestui mare laborator de cercetări în anul 1923.



În **NRL** lucrează mai mult de 2500 de cercetători, ingineri și tehnicieni. Laboratorul este condus de un ofițer de marină în calitate de manager și de un director de cercetări, civil. **NRL** este subordonat **Shock and Vibration Information Center**, împreună cu care editează volumul cu lucrări citate, «**The Shock And Vibration Digest**» [13]



În anul 1979 am primit din partea
“Department of Defense”, “Shock and
Vibration Information Center”, “Naval
Research Laboratory” o scrisoare extrem
de interesantă și bogată în informații cu
privire la organizarea și activitatea lor.



Mr. G. Kumbetian
Marine Institute
Constanta, Rumania



SHOCK AND VIBRATION INFORMATION CENTER

Naval Research Laboratory
Washington, D.C. ~~20330~~ 20375

Tel. 202 767 2220

29 January 1979

Mr. G. Kumbetian
Marine Institute
Constanta, Rumania

Dear Mr. Kumbetian

It is the mission of this Center to collect, analyze, categorize and disseminate technical information generated around the world which is concerned with shock, vibration, acoustics and related dynamic areas. Up until now we have done this principally by scanning the world's journals and abstracting relevant technical papers, then indexing these papers to become a part of our shock and vibration information base. The results of our work are disseminated principally in our monthly Shock and Vibration Digest with which you may be familiar.

Although the efforts described above provide us with considerable useful information, we feel somewhat lacking in our knowledge of on-going programs and perhaps results of studies completed in the recent past. This letter is to solicit information of this nature. In particular, information related to recent advances in computer programs and/or dynamic testing are of interest.

As you know, the data compiled by the Center is available to scientists and engineers throughout the world; the quality and extent of this data is only as good as the information received from eminent workers in the field such as yourself. You are recognized as a key investigator on subjects within our technology. We would be most appreciative if you would provide us with some description(s) of your current work and interests, supplemented perhaps by reprints of recent technical papers you have written. We are also very much interested in your opinions on areas within our technology that are critically in need of further investigation.

We freely admit that this request is very general in nature, not giving specific direction for your response. Please be guided by your own judgement as to any information you are kind enough to furnish, hopefully with minimum labor on your part.

We look forward to hearing from you.

Sincerely,


Harry C. Murray
Director

SHOCK AND VIBRATION INFORMATION CENTER

Naval Research Laboratory

Washington, D.C. ~~20330~~ 20375

29 January 1979

Dragă D-le Kumbetlian,

Centrul nostru are sarcina să adune, să analizeze, să clasifice și să răspândească informațiile din întreaga lume cu privire la șocuri, vibrații, acustică și în general la toate cele care privesc domeniul dinamic. Acest țel a fost atins până în prezent prin studierea revistelor de specialitate de pretutindeni și prin rezumarea și catalogarea lucrărilor tehnice revelatoare, publicate de acestea, în scopul constituirii unei baze de date cu informații referitoare la șocuri și vibrații.

Rezultatele muncii noastre pot ajunge la dumneavoastră prin intermediul revistei lunare de șocuri și vibrații, care vă este probabil cunoscută. Deși eforturile depuse de noi pentru a fi la curent cu informațiile cele mai noi din domeniile amintite ne permit să fim informați în timp real, considerăm că s-ar putea să ne mai lipsească totuși informații cu privire la cercetările în curs și probabil la rezultatele studiilor încheiate recent. Această scrisoare are tocmai acest scop și anume de a vă solicita informații de această natură. Ne interesează în mod deosebit informații cu privire la progresele bazate pe calcule cât și/sau cu privire la experimentele în regim dinamic. După cum știți, datele adunate de centru sunt disponibile oamenilor de știință și inginerilor din întreaga lume. În ce privește calitatea și cantitatea acestor date, suntem interesați în exclusivitate de informațiile primite de la cercetători eminenti, din domenii de activitate ca cele ale dumneavoastră.

În ce vă privește, sunteți recunoscut ca un “key investigator” al problemelor specifice tehnologiilor noastre **(las traducerea termenului citat la alegerea cititorului)**. V-am fi recunoscători dacă ne-ați trimite descrieri ale muncii și preocupărilor dvs. curente, susținute și adăugite de extrase ale lucrărilor dvs. tehnice, recente. Ne interesează, de asemenea, în cel mai înalt grad părerile dumneavoastră cu privire la lucrările din domeniul tehnologiilor noastre și care necesită în mod normal critici sau îmbunătățiri ulterioare. Recunoaștem deschis și sincer, că cererile noastre au un caracter general și nu-și propun să impună o anumită formă obligatorie răspunsului dvs. Vă rugăm să luați în considerare doar propriile dvs. criterii și raționamente în ceea ce privește răspunsul dvs., în speranța că vă va răpi cât mai puțin timp. Așteptăm cu plăcere răspunsul dvs., cu sinceritate, **Henry C. Pusey, Director.**

EPILOG

Când am primit scrisoarea amintită mai sus, eram Conferențiar la Institutul de Marină “Mircea cel Bătrân” din Constanța. Scrisoarea îmi parvenise prin filiera biroului Adjunctului Ministrului Apărării Naționale și a Serviciului de Contrainformații al Armatei, iar răspunsul meu la ea urma să parcurgă aceeași filieră. Grija Serviciilor de C.I. era justificată, ținând cont de faptul că în aceeași perioadă făceam parte și din echipa care proiecta și testa prima torpilă electrică românească, cu merite care urmau să-mi fie recunoscute ceva mai târziu.



REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA
MINISTERUL APARĂRII NAȚIONALE

(ministerul, organul central)

CERTIFICAT DE INOVATOR

Nr. 355

Pentru inovația cu titlul: Instalație pentru verificarea funcționării sistemului de propulsie al unei torpile electrice la punct fix

Inovația a fost înregistrată la data de 05.12.1983

la U.M. 02550 S București
(denumirea unității care a înreg. inovația, localitatea)

se recunoaște calitatea de autor(i) tov.: conf.dr.ing. KUMBETLIAN G.
și colectiv

Prin prezentul certificat de inovator, acordat în temeiul art. 71 al Legii 62/1974, se conferă autorului (autorilor) toate drepturile ce decurg din acesta.

Data eliberării: 06.12.1983



L. S.

PREȘEDINTELE
COMISIEI CENTRALE DE INVENȚII INOVAȚII
A. B. (semnătură autorizată)

Gr. nr. 112

Dumitru Andreescu

Prin prezentul certificat de inovator, acordat în temeiul art. 71 al Legii 62/1974, se conferă autorului (autorilor) toate drepturile ce decurg din acesta.

Data eliberării: 06.12.1983



L. S.

PREȘEDINTELE
COMISIEI CENTRALE DE INVENȚII ȘI INOVAȚII
A. M. (semnătură autorizată)

Ge.-mi. inv.

Dumitru Andreescu

Prima întrebare care mi-a fost adresată a fost: **“De unde îi cunosc ?”**. La răspunsul meu negativ, a urmat a doua întrebare: **“De unde mă cunosc ei ?”** Și atunci am pus **“alăturat”** scrisoarea primită cu articolele din reviste, de unde se vedea că adresa destinatarului scrisorii era aceeași cu cea de la subsolul primei pagini a articolelor publicate. În felul acesta m-am putut justifica și am răspuns liniștit la scrisoarea primită.



SHOCK AND VIBRATION INFORMATION CENTER

Naval Research Laboratory

Washington, D.C. 20390-20375

Tel. 202 767 2220

29 January 1979

Mr. G. Kumbetian
Marine Institute
Constanta, Rumania

Dear Mr. Kumbetian

A GENERAL MODEL FOR THE CALCULATION OF THICK PLATES
(AND RODS)

by G. KÜMBETLIAN *

This paper presents a general theoretical model for the calculation of thick plates (and rods) under biharmonic loads, which satisfies the large majority of loads met with in practice.

1. GENERAL CONSIDERATION

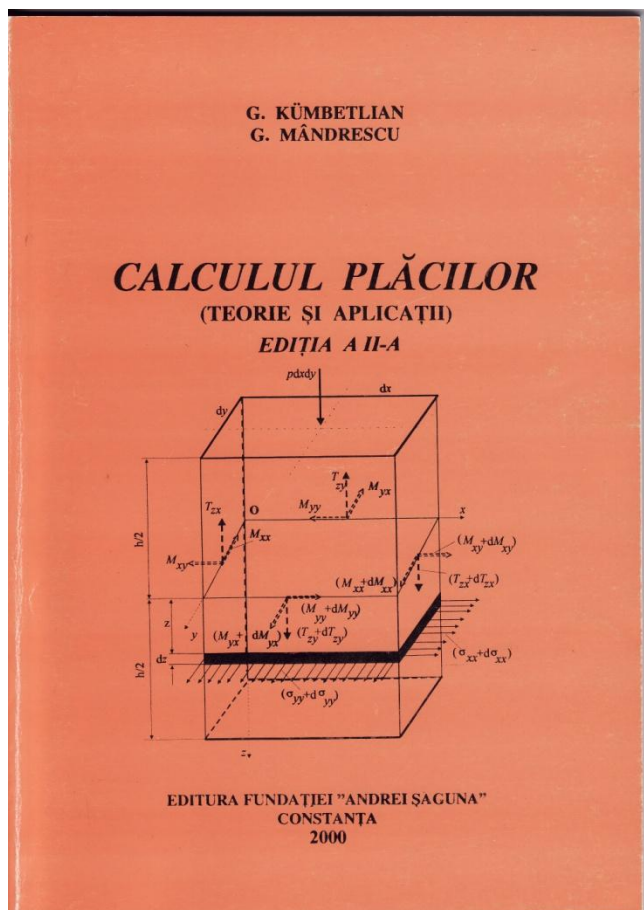
* Marine Institute, Constanța

Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., Tome 23, N° 2, p. 249—262, Bucarest, 1978

De atunci, și vizitele comandanților flotelor americane în laboratorul de Rezistența Materialelor și Tensometrie (RMT) al Institutului de Marină “Mircea cel Bătrân” au devenit mai dese.



În anul 2000, am publicat toate aceste rezultate într-o carte intitulată **CALCULUL PLĂCILOR** (TEORIE ȘI APLICAȚII), avându-l ca Referent Științific pe regretatul nostru Președinte, Academicianul **RADU VOINEA**.



REFERENT ȘTIINȚIFIC:
ACADEMICIAN RADU P. VOINEA
Președintele Secției Tehnice a Academiei Române
Președintele Academiei de Științe Tehnice din România

Redactor de carte: Prof.univ.dr.ing. GARABET KUMBETLIAN

Redactare computerizată: Șef lucrări ing. GEORGETA MÂNDRESCU

Redactor șef de editură: Dr. DOINA PĂULEANU

Tipar: SUNNAY ABIL

I.S.B.N.: 973 – 9262 – 82 – 1

Tiparul executat la Editura Fundației „Andrei Șaguna” Constanța

Toate drepturile sunt rezervate
Editurii Fundației "Andrei Șaguna" Constanța,
str. 1907, nr. 25, tel./fax: 041/66.25.20,
E-mail: editura@tomrad.ro

Bibliografie minimală.

- 1. Mișicu, M., “Exact theories of thick shells derived by means of the method of transversal mobility of physical fields and correlations with other theories”. Rev.Roum.Sci.Techn., Méc.Appl., 1973, 18, 4, 663-682.**
- 2. Mișicu, M., “Solution of the antimedial problem for rectangular plates using real functions”, Rev. Roum. Sci.Techn., Méc.Appl., 1973, 18, 6, 1159-117.**
- 3. Wikipedia, “The Department of Defense” (DoD)**
- 4. Wikipedia, “Office of the Secretary of Defense” (OSD)**
- 5. Wikipedia, “Defense Technical Information Center” (DTIC)**
- 6. Wikipedia, “Shock and Vibration Information Analysis Center” (SAVIAC)**
- 7. Wikipedia, “Shock and Vibration Journal” (SVJ)**

8. Kumbetlian, G.: *“Determinarea câmpului de deplasari, momente forte taietoare si tensiuni în placile groase dreptunghiulare actionate hidrostatic, cu laturile opuse rezemate si încastrate”*. în Studii si cercetari de mecanica aplicata. Ed. Acad. Rom. Tom 35, nr. 3/1976, ISSN 0035-4074, pag. 363-386.
9. Kumbetlian, G.: *“Exact calculation of the plane rectangular, hydrostatically acted plates, with two opposite edges simply supported and the other rigidly clamped, on the basis of solving antimedial problem of the theory of elastic mobility”*. Revue Roumaine des sciences techniques, Serie de mecanique applique. Academie de la Roumanie, Tome 21, no 3/1976, ISSN 0035-4074, pag. 447-462.

- 10. Kümbetlian,G.:“*A general model for the calculation of thick plates (and rods)*”. Roumanian Journal of technical sciences. Applied mechanics, Acad.Rom.Tom 23 nr .2/1978, ISSN 0035-4074, pag. 249-262.**
- 11.Kümbetlian,G.:“*Influenta grosimii asupra câmpurilor marimilor fizice ale barelor si placilor groase*”.Studii si cercetari de mecanica aplicata. Acad. Rom. Tom 38 nr 1/1979, ISSN 0035-4074, pag. 99-105.**
- 12. Kümbetlian,G. Pascale,D.:“*A computer programme for thick anticlastic plates*”.Rev. Roum. des sci.techn. Mec. applique. Acad. Roum. Tome 26 nr. 6/1981, ISSN 0035-4074, pag. 899-908.**
- 13. Wikipedia, « The Shock And Vibration Digest » Volume 10, No.12, December 1978 , page 78, no. 78-1820.**

14. Love, A.E.H., *“A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity”*, Cambridge University Press, 1934.
15. Lurie, A.J., *“Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie”*, Akademie Verlag, Berlin, 1963.
16. Clebsch/S.Venant, *“Elastizität der festen Körper”*, 1862/
“Théorie de l'élasticité des corps solides”, 1883
17. Christof Rohrbach, *“Handbuch für experimentelle Spannungsanalyse”* 1971.
18. Kümbetlian, G., Neamtu, L., Oanta, E.: *“Metode comparative pentru studiul tensiunilor în placi groase”*. Al VI-lea Simpozion national de tensometrie si încercari de materiale, cu participare internationala. Craiova, 1992, vol.II, pag. 578-585.

19. Kumbetlian,G., Neamtu,L.: “*A comparative study of stresses in thick plates, under mechanical and thermic loads*”. A 2^a Conferință Națională de Elemente finite si de frontieră, cu participare internationala. Sibiu, mai 1993, vol.I, pag.112-119.

**VĂ MULTUMESC
PENTRU ATENȚIE**